Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^2 y - \frac{1}{3} y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$.

Решение

$z'_x = 2xy + 4x$; $z'_y = x^2 - y^2 + 6y$.

$$\begin{cases} 2xy + 4x = 0 \\ x^2 - y^2 + 6y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \cdot (y+2) = 0 \\ x^2 - y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем: $x = 0$ или $y = -2$.

Если $x = 0$, то из второго уравнения получим:

$$0^2 - y^2 + 6y = 0;\ y \cdot (y-6) = 0,\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 6 \end{array}\right.$$

Если $y = -2$, то из второго уравнения получим:

$$x^2 - 4 - 12 = 0;\ x^2 = 16;\ \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Стационарные точки: $M_1(0;0)$, $M_2(0;6)$, $M_3(-4;-2)$, $M_4(4;-2)$.

$z''_{xx} = 2y + 4$; $z''_{xy} = 2x$; $z''_{yy} = -2y + 6$.

$$\Delta = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = (2y+4) \cdot (-2y+6) - 4x^2.$$

$$\Delta(M_1) = (2 \cdot 0 + 4) \cdot (-2 \cdot 0 + 6) - 4 \cdot 0^2 = 24$$
$$\Delta(M_2) = (2 \cdot 6 + 4) \cdot (-2 \cdot 6 + 6) - 4 \cdot 0^2 = -96$$
$$\Delta(M_3) = (2 \cdot (-2) + 4) \cdot (-2 \cdot (-2) + 6) - 4 \cdot (-4)^2 = -64$$
$$\Delta(M_4) = (2 \cdot (-2) + 4) \cdot (-2 \cdot (-2) + 6) - 4 \cdot 4^2 = -64$$

Так как $\Delta(M_2) < 0$, $\Delta(M_3) < 0$ и $\Delta(M_4) < 0$, то в точках M_2, M_3 и M_4 экстремума нет. Так как в точке M_1 имеем $\Delta(M_1) > 0$ и $z''_{xx} = 4 > 0$, то M_1 – точка минимума.

$$z_{\min} = z(0;0) = -1$$

Ответ: $(0;0)$ – точка минимума, $z_{\min} = -1$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.