Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать функцию $f(x,y)=x^2+4y^3-2xy+1$ на локальный экстремум.

Решение

$f'_x(x,y)=2x-2y$; $f'_y(x,y)=12y^2-2x$.

$$\begin{cases}2x-2y=0\\12y^2-2x=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y=x\\6y^2-x=0\end{cases}$$

$6x^2-x=0$; $x\cdot(6x-1)=0$; $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{6}\end{array}\right.$.

Если $x=0$, то $y=0$.

Если $x=\dfrac{1}{6}$, то $y=\dfrac{1}{6}$.

Стационарные точки: $M_1(0;0)$, $M_2\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{6}\right)$.

$f''_{xx}(x,y)=2$; $f''_{xy}(x,y)=-2$; $f''_{yy}(x,y)=24y$.

$$\Delta=f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y)-\left(f''_{xy}(x,y)\right)^2=48y-4.$$

В точке M_1 получим: $\Delta(M_1)=48\cdot 0-4=-4$.

В точке M_2 получим: $\Delta(M_2)=48\cdot\dfrac{1}{6}-4=4$.

Так как $\Delta(M_1)<0$, то в точке M_1 нет экстремума.

Так как $\Delta(M_2)>0$ и $f''_{xx}(M_2)>0$, то M_2 – точка минимума.

$$f_{\min}=f(M_2)=\left(\frac{1}{6}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3-2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+1=\frac{107}{108}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{6}\right)$ – точка минимума, $f_{\min}=\dfrac{107}{108}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.