Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать функцию $z=e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2\right)$ на экстремум.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2\right)+e^{2x+3y}\left(16x-6y\right)=e^{2x+3y}\left(16x^2-12xy+6y^2+16x-6y\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=3e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2\right)+e^{2x+3y}\left(-6x+6y\right)=e^{2x+3y}\left(24x^2-18xy+9y^2-6x+6y\right)$$
$$\begin{cases}16x^2-12xy+6y^2+16x-6y=0\\24x^2-18xy+9y^2-6x+6y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}8x^2-6xy+3y^2+8x-3y=0\\8x^2-6xy+3y^2-2x+2y=0\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим: $10x-5y=0$, откуда $y=2x$. Подставляя $y=2x$ в первое уравнение, получим:

$$8x^2+2x=0,\ 2x\cdot\left(4x+1\right)=0,\ \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Стационарные точки: $M_1\left(0;0\right),\ M_2\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{2x+3y}\left(16x^2-12xy+6y^2+16x-6y\right)+e^{2x+3y}\left(32x-12y+16\right)=$$
$$=e^{2x+3y}\left(32x^2-24xy+12y^2+64x-24y+16\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=3e^{2x+3y}\left(24x^2-18xy+9y^2-6x+6y\right)+e^{2x+3y}\left(-18x+18y+6\right)=$$
$$=e^{2x+3y}\left(72x^2-54xy+27y^2-36x+36y+6\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3e^{2x+3y}\left(16x^2-12xy+6y^2+16x-6y\right)+e^{2x+3y}\left(-12x+12y-6\right)=$$
$$=e^{2x+3y}\left(48x^2-36xy+18y^2+36x-6y-6\right)$$

В точке $M_1\left(0;0\right)$ получим: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=16$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6$.

$$\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=60$$

Так как $\Delta\left(M_1\right)>0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$, то $M_1\left(0;0\right)$ – точка минимума.

$$z_{\min}=z\left(0;0\right)=0.$$

В точке $M_2\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$ получим: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=14e^{-2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{3e^{-2}}{2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-9e^{-2}$.

$$\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=-60\,e^{-4}$$

Так как $\Delta(M_2)<0$, то в точке M_2 нет экстремума.

Ответ: $(0;0)$ – точка минимума, $z_{\min}=0$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.