Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти стационарные точки функции $z = 2x^3 + 4xy^2 + 2x^2 + y^2$ и исследовать их на экстремум.

Решение

$z'_x = 6x^2 + 4y^2 + 4x$, $z'_y = 8xy + 2y$.

$$\begin{cases} 6x^2 + 4y^2 + 4x = 0 \\ 8xy + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + 2x = 0 \\ y \cdot (1 + 4x) = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем: $y = 0$ или $1 + 4x = 0$, $x = -\frac{1}{4}$.

Если $y = 0$, то $3x^2 + 2x = 0$, $x \cdot (3x + 2) = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$. Стационарные точки: $M_1(0;0)$, $M_2\left(-\frac{2}{3};0\right)$.

Если $x = -\frac{1}{4}$, то $4y^2 - \frac{5}{8} = 0$, $y^2 = \frac{5}{32}$, $\left[\begin{array}{l} y = -\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \end{array}\right.$. Стационарные точки: $M_3\left(-\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\right)$, $M_4\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\right)$.

$z''_{xx} = 12x + 4$, $z''_{xy} = 8y$, $z''_{yy} = 8x + 2$.

$$\Delta = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = (12x + 4) \cdot (8x + 2) - 64y^2$$

Так как $\Delta(M_1) = 8 > 0$, $z''_{xx}(M_1) = 4 > 0$, то M_1 – точка минимума, $z_{\min} = z(M_1) = 0$.
Так как $\Delta(M_2) = \frac{40}{3} > 0$, $z''_{xx}(M_1) = -4 < 0$, то M_2 – точка максимума, $z_{\max} = z(M_2) = \frac{8}{27}$.
Так как $\Delta(M_3) = -10 < 0$, то в точке M_3 экстремума нет.
Так как $\Delta(M_4) = -10 < 0$, то в точке M_4 экстремума нет.

Ответ:

- $(0;0)$ – точка минимума, $z_{\min} = 0$
- $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ – точка максимума, $z_{\max} = \frac{8}{27}$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.