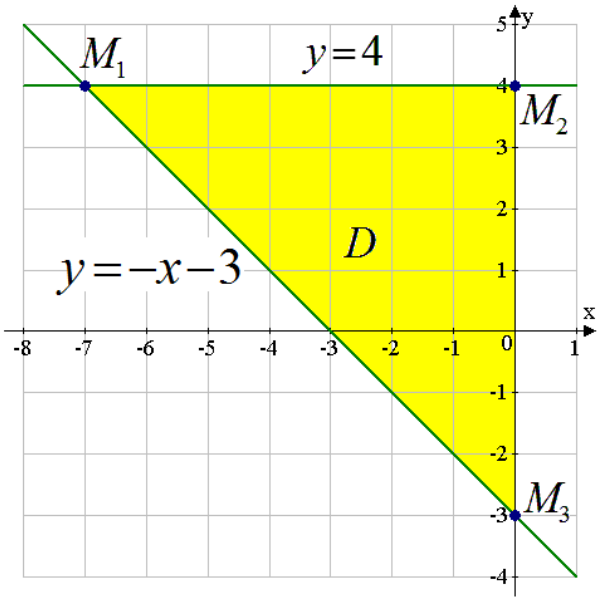
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $x \le 0$, $y \le 4$, $x + y \ge -3$.

Решение

Область D ограничена осью Oy и прямыми $y = 4$, $y = -x - 3$.



$z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$.

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем: $y = 2x + 1$. Подставляя во второе уравнение, будем иметь:

$$2 \cdot (2x + 1) - x + 1 = 0$$
$$4x + 2 - x + 1 = 0$$
$$3x = -3;\ x = -1;\ y = 2 \cdot (-1) + 1 = -1.$$

Полученная точка $M_0(-1;-1)$ принадлежит области D. В этой точке получим:

$$z_0 = z(-1;-1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = -1$$

При $y = 4$, $-7 \le x \le 0$, получим:

$$z = x^2 + 16 - 4x + x + 4 = x^2 - 3x + 20$$
$$z'_x = 2x - 3,\ 2x - 3 = 0,\ x = \frac{3}{2}.$$

Значение $x=\frac{3}{2}$ не принадлежит отрезку $-7\le x\le 0$. Значения функции на концах отрезка в точках M_1 и M_2:

$$z_1=(-7)^2-3\cdot(-7)+20=90;\ z_2=0^2-3\cdot 0+20=20.$$

При $x=0$, $-3\le y\le 4$, получим:

$$z=0^2+y^2-0\cdot y+0+y=y^2+y$$
$$z'_y=2y+1,\ 2y+1=0,\ y=-\frac{1}{2}.$$

Значение $y=-\frac{1}{2}$ принадлежит отрезку $-3\le y\le 4$. При $y=-\frac{1}{2}$ получим:

$$z_3=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

На краях отрезка лежат точки M_2 и M_3. Значение функции в точке M_2 было найдено ранее, а в точке M_3 при $y=-3$ получим:

$$z_4=(-3)^2+(-3)=6$$

Если $y=-x-3$, $-7\le x\le 0$, то получим:

$$z=x^2+(-x-3)^2-x(-x-3)+x-x-3=3x^2+9x+6.$$
$$z'_x=6x+9,\ 6x+9=0,\ x=-\frac{3}{2}.$$

Значение $x=-\frac{3}{2}$ принадлежит отрезку $-7\le x\le 0$. При $x=-\frac{3}{2}$ получим:

$$z_5=3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+6=-\frac{3}{4}$$

Значения функции на концах отрезка в точках M_1 и M_3 были вычислены ранее.

Получили такие значения функции: $z_0=-1$; $z_1=90$; $z_2=20$; $z_3=-\frac{1}{4}$; $z_4=6$; $z_5=-\frac{3}{4}$.

Наименьшее значение: $z_{\min}=-1$
Наибольшее значение: $z_{\max}=90$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.