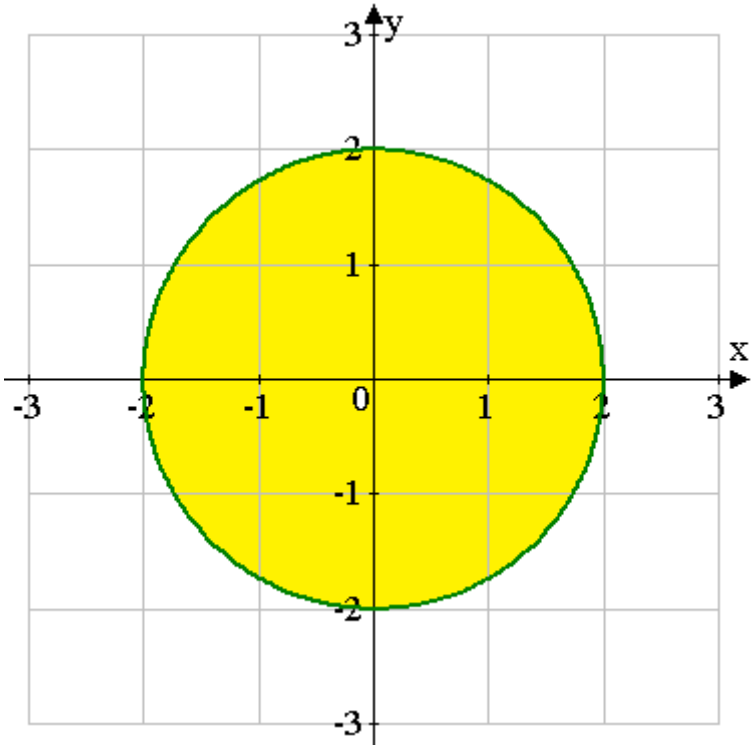
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в области $x^2 + y^2 \le 4$.

Решение

Данная область ограничена окружностью с центром в начале координат и радиусом $R = 2$



Найдём стационарные точки внутри данной области.

$z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$.

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Получили точку $M_0(0;0)$, лежащую в данной области. Значение функции в этой точке будет таким:

$$z_0 = z(0;0) = 0.$$

Исследуем функцию на границе области, т.е. при условии $x^2 + y^2 = 4$. Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$F = x^2 - y^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 4).$$

$F'_x = 2x + 2\lambda x$, $F'_y = -2y + 2\lambda y$.

$$\begin{cases} 2x+2\lambda x=0 \\ -2y+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+\lambda x=0 \\ -y+\lambda y=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\cdot(1+\lambda)=0 \\ y\cdot(-1+\lambda)=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

Если $\lambda=-1$, то из второго уравнения имеем $y=0$. Если $y=0$, то из третьего уравнения получим: $x^2=4$, $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$. Имеем точки $M_1(-2;0)$ и $M_2(2;0)$.

Если $\lambda=1$, то из первого уравнения имеем $x=0$. Если $x=0$, то из третьего уравнения получим: $y^2=4$, $\left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=2 \end{array}\right.$. Имеем точки $M_3(0;-2)$ и $M_4(0;2)$.

Если $\lambda\neq-1$ и $\lambda\neq1$, то из первого и второго уравнений имеем: $x=0$, $y=0$. В этом случае из третьего уравнения получим противоречие: $-4=0$.

$$z(M_1)=z(M_2)=4,\ z(M_3)=z(M_4)=-4.$$

Выбирая из полученных значений наименьшее и наибольшее, получим:

Наименьшее значение: $z_{\min}=-4$
Наибольшее значение: $z_{\max}=4$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.