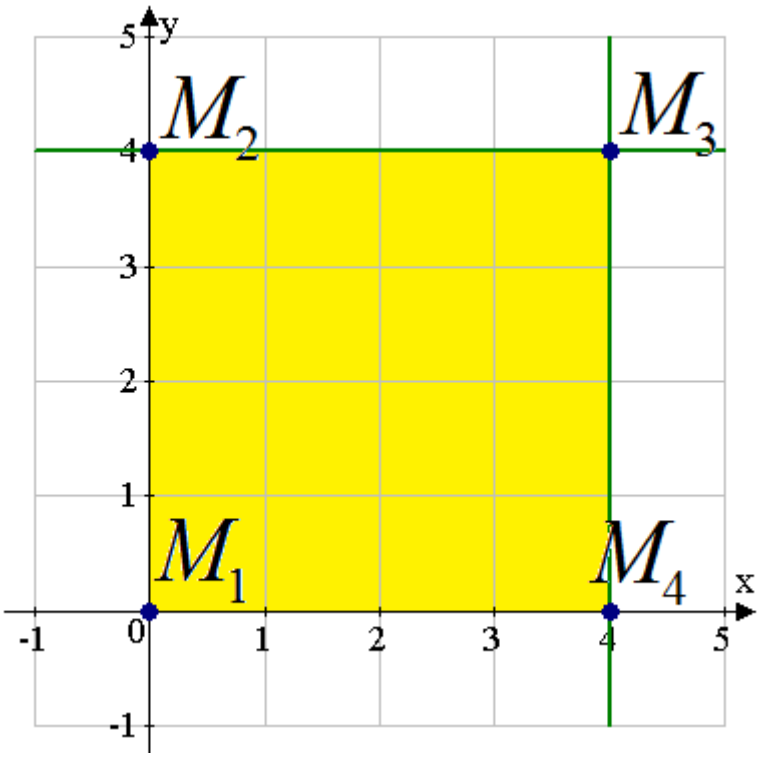
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$.

Решение

Данная область ограничена осями координат (прямыми $x = 0$, $y = 0$) и прямыми $x = 4$, $y = 4$.



Найдём стационарные точки внутри данной области.

$z'_x = 3x^2 - 9y$, $z'_y = 3y^2 - 9x$.

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3y = 0 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения: $x = \dfrac{y^2}{3}$. Подставляя в первое уравнение, получим:

$$\frac{y^4}{9} - 3y = 0,\ y \cdot (y^3 - 27) = 0,\ \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Получили точки $M_0(3;3)$ и $M_1(0;0)$, лежащие в данной области. Значения функции в этих точках будет такими:

$$z_0 = z(3;3) = 0,\ z_1 = z(0;0) = 27.$$

Если $x=0$, $0\le y\le 4$, то получим: $z=y^3+27$.

$$z'_y=3y^2,\ 3y^2=0,\ y=0.$$

Получили точку $M_1(0;0)$. На краях отрезка лежат точки $M_1(0;0)$ и $M_2(0;4)$.

$$z_2=z(0;4)=91.$$

Если $y=0$, $0\le x\le 4$, то получим: $z=x^3+27$.

$$z'_x=3x^2,\ 3x^2=0,\ x=0.$$

Получили точку $M_4(4;0)$. На краях отрезка лежат точки $M_1(0;0)$ и $M_4(4;0)$.

$$z_4=z(M_4)=91.$$

Если $x=4$, $0\le y\le 4$, то получим: $z=y^3-36y+91$.

$$z'_y=3y^2-36,\ 3y^2-36=0,\ y^2=12,\ \left[\begin{array}{l} y=-2\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Получили точку $M_5\left(4;2\sqrt{3}\right)$. На краях отрезка лежат точки $M_3(4;4)$ и $M_4(4;0)$.

$$z_5=z\left(4;2\sqrt{3}\right)=91-48\sqrt{3},\ z_3=z(4;4)=11.$$

Если $y=4$, $0\le x\le 4$, то получим: $z=x^3-36x+91$.

$$z'_x=3x^2-36,\ x^2=12,\ \left[\begin{array}{l} x=-2\sqrt{3} \\ x=2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Получили точку $M_6\left(2\sqrt{3};4\right)$. На краях отрезка лежат точки $M_2(0;4)$ и $M_3(4;4)$.

$$z_6=z\left(2\sqrt{3};4\right)=91-48\sqrt{3}.$$

Выбирая из полученных значений наименьшее и наибольшее, получим:

Наименьшее значение: $z_{\min}=0$
Наибольшее значение: $z_{\max}=91$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.