Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите вертикальную и горизонтальную асимптоты графика функции $y=\dfrac{12x^2-7x+1}{8x^2-22x+5}$. Вычислите площадь прямоугольника, ограниченного осями координат и найденными асимптотами.

Решение

Это дробно-рациональная функция. Эта функция имеет разрыв лишь в тех точках, в которых знаменатель равен 0:

$$8x^2-22x+5=0$$
$$D=324;\ x_1=\frac{1}{4};\ x_2=\frac{5}{2}.$$

Заданная функция непрерывна при $x\in R\setminus\left\{\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{2}\right\}$, поэтому вертикальная асимптота может существовать лишь в точках $x=\dfrac{1}{4}$ и $x=\dfrac{5}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}y(x)=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{12x^2-7x+1}{8x^2-22x+5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{(3x-1)(4x-1)}{(2x-5)(4x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{3x-1}{2x-5}=\frac{1}{18}$$

Следовательно, прямая $x=\dfrac{1}{4}$ не является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}-0}y(x)=\lim_{x\to\frac{5}{2}-0}\frac{12x^2-7x+1}{8x^2-22x+5}=\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{5}{2}+0}y(x)=\lim_{x\to\frac{5}{2}+0}\frac{12x^2-7x+1}{8x^2-22x+5}=\infty$$

Прямая $x=\dfrac{5}{2}$ – вертикальная асимптота. Найдём уравнение горизонтальной асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-7x+1}{8x^2-22x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{12-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{8-\frac{22}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

Прямая $y=\dfrac{3}{2}$ – горизонтальная асимптота. Площадь прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\dfrac{5}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$ и осями координат, будет такой:

$$S=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$$

Ответ: $\frac{15}{4}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре,
аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.