Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Для функции $y=f(x)$, которая при $x\neq 0$ задается формулой $|x|x+\cos(x^2)+\dfrac{e^x-1}{x}$:

a) доопределить ее по непрерывности при $x=0$,
b) вычислить ее производную в точке $x=0$.
c) вычислить ее производную в любой точке $x\neq 0$.

Решение

a)

$$\lim_{x\to 0-0} y(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(|x|x+\cos(x^2)+\frac{e^x-1}{x}\right)=0+1+1=2$$

$$\lim_{x\to 0+0} y(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(|x|x+\cos(x^2)+\frac{e^x-1}{x}\right)=0+1+1=2$$

Доопределим функцию таким образом: $y(x)=\begin{cases}|x|x+\cos(x^2)+\dfrac{e^x-1}{x},\ x\neq 0;\\ 2,\ x=0.\end{cases}$

b)

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x)-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|\Delta x+\cos(\Delta x^2)+\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}-2}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|+\frac{\Delta x\cos(\Delta x^2)+e^{\Delta x}-1-2\Delta x}{\Delta x^2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|+\frac{\Delta x\cos(\Delta x^2)-\Delta x+e^{\Delta x}-1-\Delta x}{\Delta x^2}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|-\frac{\Delta x-\Delta x\cos(\Delta x^2)}{\Delta x^2}+\frac{e^{\Delta x}-1-\Delta x}{\Delta x^2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|-\frac{1-\cos(\Delta x^2)}{\Delta x}+\frac{e^{\Delta x}-1-\Delta x}{\Delta x^2}\right)$$

Рассмотрим отдельно два предела:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos(\Delta x^2)}{\Delta x}=\left[1-\cos(\Delta x^2)\sim\frac{(\Delta x^2)^2}{2}=\frac{\Delta x^4}{2}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x^4}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3}{2}=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1-\Delta x}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x+\dfrac{\Delta x^2}{2}+o(\Delta x^2)-1-\Delta x}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x^2}{2}+o(\Delta x^2)}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{o(\Delta x^2)}{\Delta x^2}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

Вернёмся к изначальному пределу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|-\frac{1-\cos(\Delta x^2)}{\Delta x}+\frac{e^{\Delta x}-1-\Delta x}{\Delta x^2}\right)=0-0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Следовательно, $y'(0)=\frac{1}{2}$.

c) Если $x\neq 0$, то $y=|x|x+g(x)$, где $g(x)=\cos(x^2)+\frac{e^x-1}{x}$.

$$g'(x)=-\sin(x^2)\cdot(-2x)+\frac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2}=-2x\sin(x^2)+\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

Если $x<0$, то $y=-x^2+g(x)$, поэтому

$$y'=-2x+g'(x)=-2x-2x\sin(x^2)+\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

Если $x>0$, то $y=x^2+g(x)$, поэтому

$$y'=2x+g'(x)=2x-2x\sin(x^2)+\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

Объединяя указанные результаты, получим, что при любом $x\neq 0$

$$y'=2\operatorname{sgn}x\cdot x-2x\sin(x^2)+\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.