Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать данные функции на непрерывность. Если у функции $f(x)$ имеются точки разрыва, тогда определить характер разрыва функции в этих точках (точка разрыва первого или второго рода).

а) $f(x)=1-e^{-\frac{1}{x^2}}$, б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$.

Решение

а) Исследовать на разрыв нужно лишь точку $x=0$, в которой знаменатель равен 0. В остальных точках функция непрерывна. В точке $x=0$ функция не определена.

Если $x\to 0-0$ или $x\to 0+0$, то $x^2\to 0+0$, поэтому $-\dfrac{1}{x^2}\to -\infty$, следовательно $e^{-\frac{1}{x^2}}\to 0$. Это значит, что

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(1-e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=1-0=1$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(1-e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=1-0=1$$

Так как односторонние пределы конечны и равны между собой, т.е. $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, но значение функции в точке $x=0$ не определено, то в данной точке функция терпит разрыв первого рода (устранимый разрыв).

б) Исследовать на разрыв нужно лишь значение $x=0$, для которого знаменатель равен 0. Для остальных значениях x функция непрерывна.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{-x}=\lim_{x\to 0-0}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-1$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Так как односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой, то в точке $x=0$ функция терпит разрыв первого рода со скачком $\delta=|1-(-1)|=2$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.