Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x-1}{e^{x^2}-e}$, определить их характер. Построить эскиз графика функции вблизи точек разрыва.

Решение

Точки разрыва функции $f(x)$ определяются нулями знаменателя, т.е. точки разрыва найдем из следующего соотношения:

$$e^{x^2}-e=0 \Leftrightarrow e^{x^2}=e^1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Исследуем на разрыв точку $x=-1$. Найдём односторонние пределы в данной точке. Если $x\to -1-0$, то $x^2\to 1+0$, поэтому $e^{x^2}-e\to 0+0$. Если $x\to -1+0$, то $x^2\to 1-0$, поэтому $e^{x^2}-e\to 0-0$. Так как при $x\to -1$ имеем $x-1\to -2$, то:

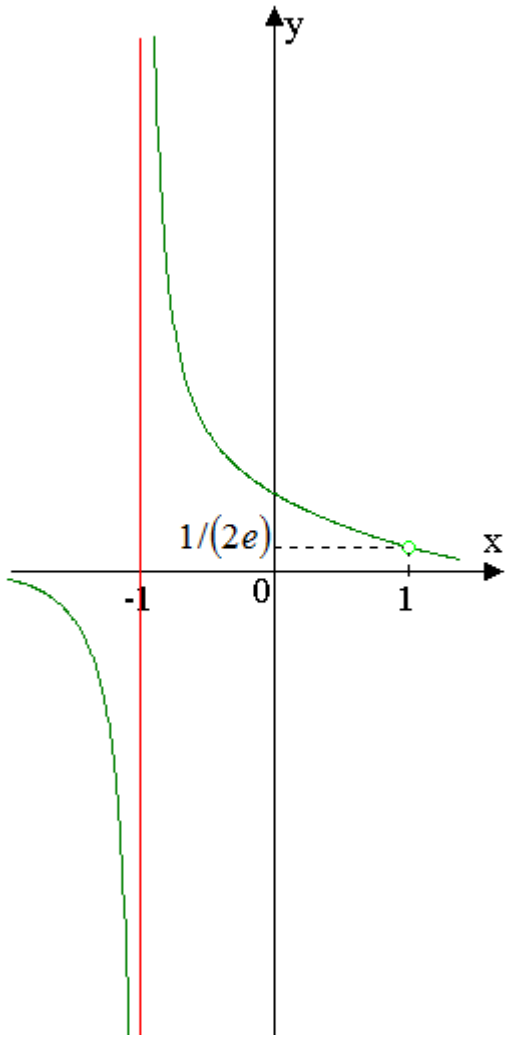
$$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}\frac{x-1}{e^{x^2}-e}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}\frac{x-1}{e^{x^2}-e}=+\infty.$$

Так как есть односторонний предел, равный ∞, то $x=-1$ – точка разрыва второго рода. Прямая $x=-1$ будет вертикальной асимптотой.

Исследуем на разрыв точку $x=1$. Значение $f(1)$ не определено. Найдём $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x^2}-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e\cdot\left(e^{x^2-1}-1\right)}=\frac{1}{e}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x^2-1}-1}=\left[\begin{array}{l} x^2-1\to 0; \\ e^{x^2-1}-1\sim x^2-1. \end{array}\right]=\frac{1}{e}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{e}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2e}$, то $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\dfrac{1}{2e}$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\dfrac{1}{2e}$. Односторонние пределы существуют, конечны, но не равны значению функции $f(1)$. Следовательно, $x=1$ – точка разрыва первого рода. Так как при этом односторонние пределы равны между собой, то имеем частный случай: $x=1$ – точка «устранимого» разрыва.



Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.