**Задача скачана с сайта Tutor.com.ru**
**Tutor.com.ru** – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

*Условие*

Исследовать на непрерывность и построить схематично графики функций.

а) $y=\begin{cases}\log_2|x|;\ x\le 1\\ \sqrt{4x-x^2-3};\ 1<x\le 3\\ 2-x,\ x>3.\end{cases}$ б) $y=\dfrac{x^3-2x^2+3x}{x}$; в) $y=e^{\frac{x}{6-2x}}$.

*Решение*

**а)** $y=\begin{cases}\log_2|x|;\ x\le 1\\ \sqrt{4x-x^2-3};\ 1<x\le 3\\ 2-x,\ x>3.\end{cases}$

Рассмотрим функции $y=\log_2|x|$, $y=\sqrt{4x-x^2-3}$ и $y=2-x$. Функция $y=\log_2|x|$ определена при всех $x\neq 0$. Для функции $y=\sqrt{4x-x^2-3}$ получим:

$$\begin{cases}y\ge 0\\ 4x-x^2-3\ge 0\end{cases}\quad\begin{cases}y\ge 0\\ x^2-4x+3\le 0\end{cases}\quad\begin{cases}y\ge 0\\ (x-2)^2\le 1\end{cases}\quad\begin{cases}y\ge 0\\ |x-2|\le 1\end{cases}\quad\begin{cases}y\ge 0\\ 1\le x\le 3\end{cases}$$

$$y^2=4x-x^2-3,\ x^2-4x+4+y^2=1,\ (x-2)^2+y^2=1.$$

Следовательно, при условии $1<x\le 3$ функция $y=\sqrt{4x-x^2-3}$ определяет часть окружности с центром в точке $(2;0)$ и радиусом $R=1$, расположенную над осью $Ox$.

Проверим на разрыв точки $x=0$, $x=1$ и $x=3$. В остальных точках заданная функция непрерывна.

В точке $x=0$ получим:

$$\lim_{x\to 0-0}y(x)=\lim_{x\to 0-0}\log_2|x|=-\infty,\ \lim_{x\to 0+0}y(x)=\lim_{x\to 0+0}\log_2|x|=-\infty.$$

Следовательно, $x=0$ – точка разрыва второго рода. Прямая $x=0$ (ось $Oy$) будет вертикальной асимптотой.

В точке $x=1$ получим:

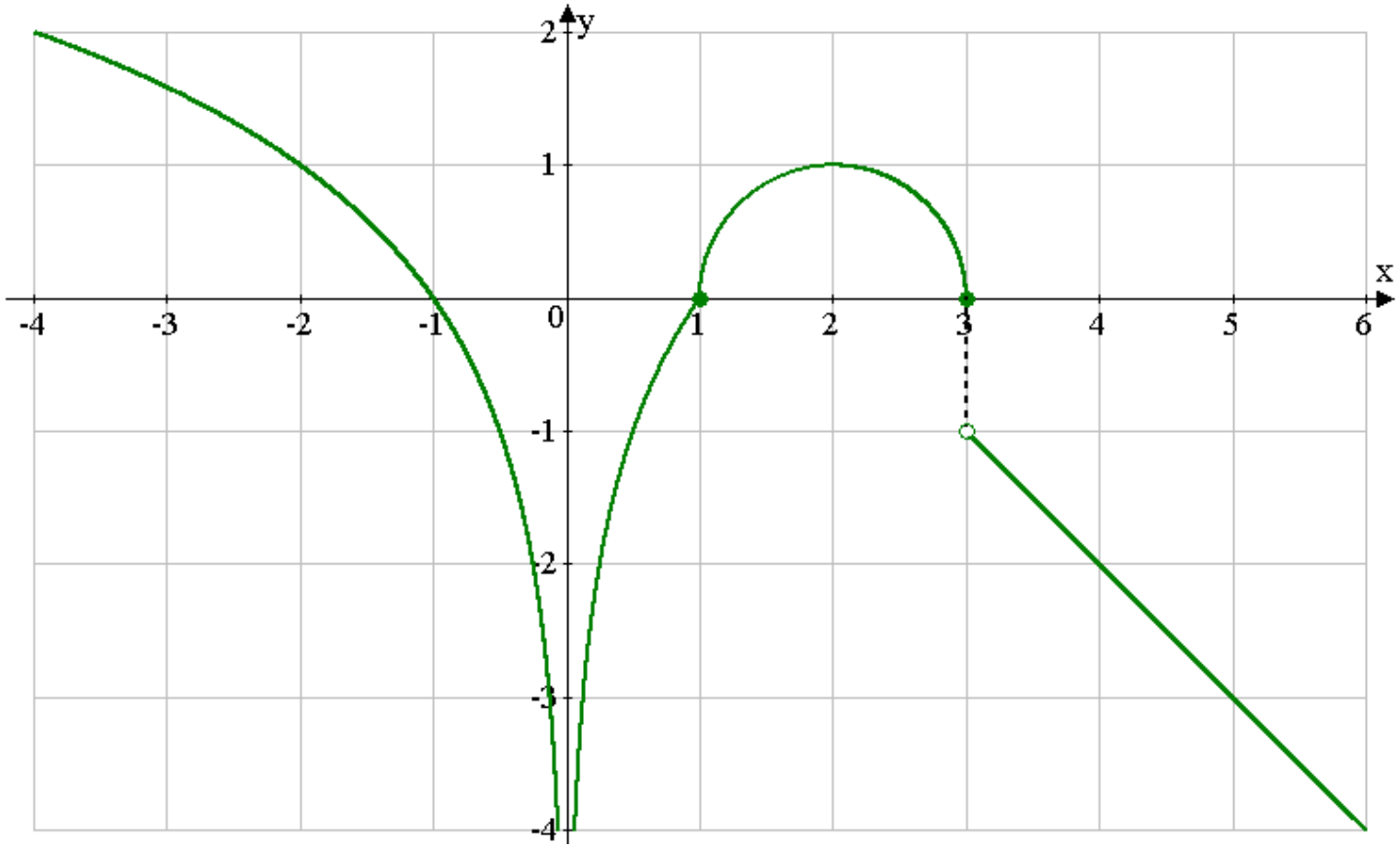
$$y(1)=\log_2 1=0,\ \lim_{x\to 1-0}y(x)=\lim_{x\to 1-0}\log_2|x|=0,\ \lim_{x\to 1+0}y(x)=\lim_{x\to 1+0}\sqrt{4x-x^2-3}=0.$$

Следовательно, в точке $x=1$ функция непрерывна.

В точке $x=3$ получим:

$$y(3)=\sqrt{12-9-3}=0,\ \lim_{x\to 3-0} y(x)=\lim_{x\to 3-0}\sqrt{4x-x^2-3}=0,\ \lim_{x\to 3+0} y(x)=\lim_{x\to 3+0}(2-x)=-1.$$

В точке $x=3$ функция имеет разрыв первого рода со скачком $\delta=|-1-0|=1$.




**б)** $y=\dfrac{x^3-2x^2+3x}{x}$

Данная функция непрерывна при $x\neq 0$. При $x\neq 0$ получим:

$$y=\frac{x^3-2x^2+3x}{x}=\frac{x\cdot(x^2-2x+3)}{x}=x^2-2x+3.$$

В точке $x=0$ будем иметь:

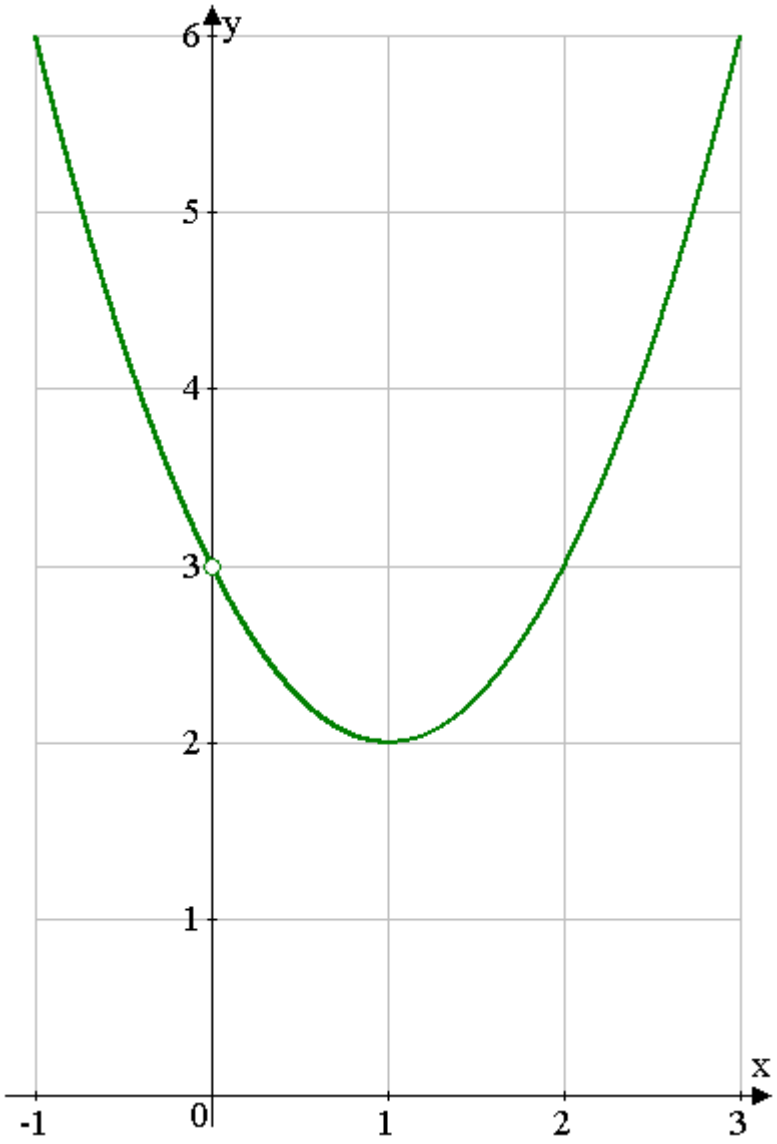
$$\lim_{x\to 0} y(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2-2x+3)=3.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} y(x)=3$, то $\lim\limits_{x\to 0-0} y(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} y(x)=3$. Следовательно, в точке $x=3$ функция имеет разрыв первого рода. Так как $\lim\limits_{x\to 0-0} y(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} y(x)$, то $x=0$ – точка устранимого разрыва.

График функции $y(x)$ совпадает с графиком параболы $y=x^2-2x+3$ за исключением выколотой точки $(0;3)$.

$$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

Парабола $y=x^2-2x+3$ имеет вершину в точке $(1;2)$ и ось симметрии, лежащую на прямой $x=1$.




**в)** $y = e^{\frac{x}{6-2x}}$

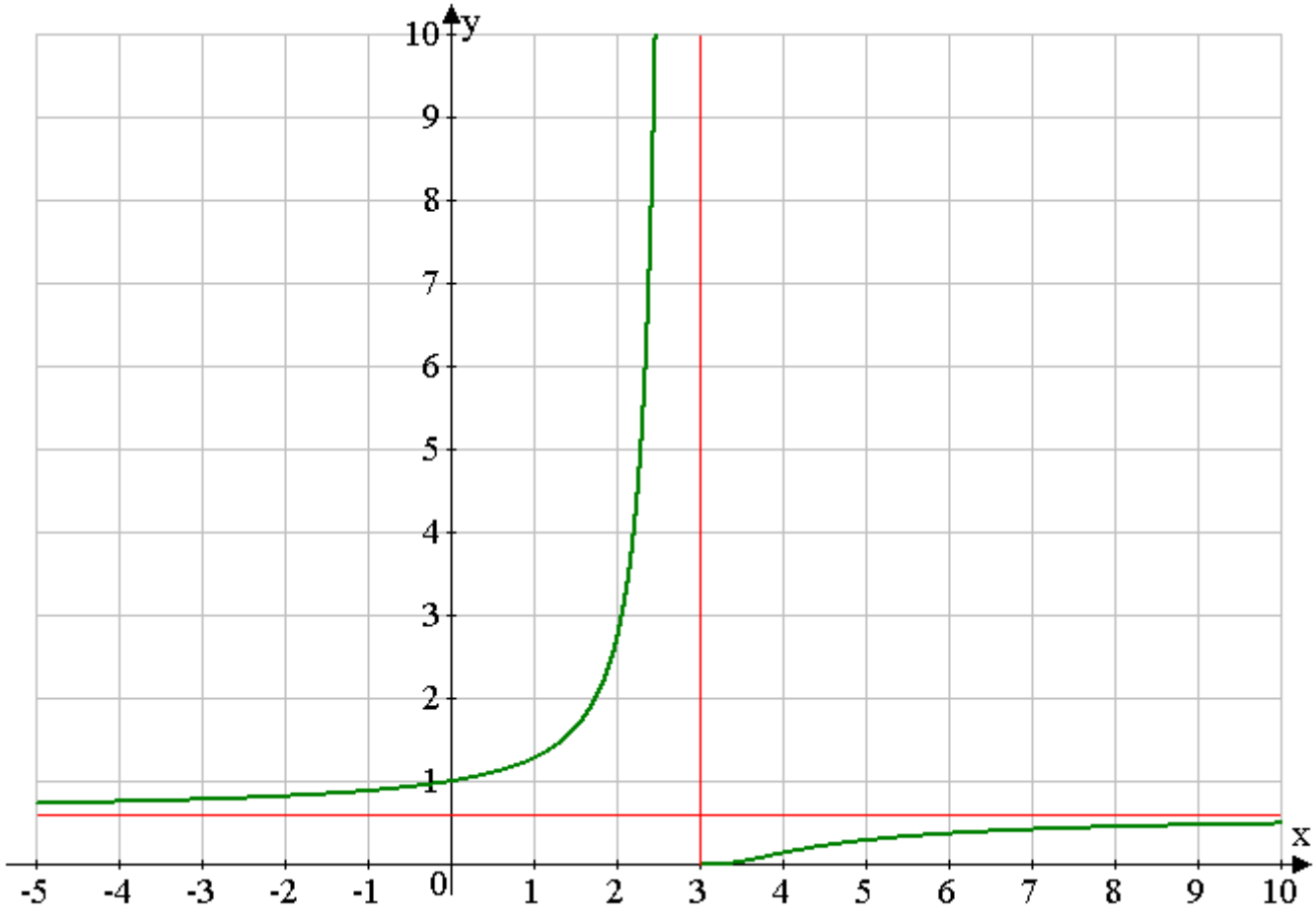
Данная функция непрерывна при $6-2x \neq 0$, т.е. при $x \neq 3$. Исследуем на разрыв точку $x = 3$. Если $x \to 3-0$, то $6-2x \to 0+0$, поэтому $\frac{x}{6-2x} \to +\infty$. Если $x \to 3+0$, то $6-2x \to 0-0$, поэтому $\frac{x}{6-2x} \to -\infty$. Следовательно, односторонние пределы будут такими:

$$\lim_{x\to 3-0} y(x) = \lim_{x\to 3-0} e^{\frac{x}{6-2x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 3+0} y(x) = \lim_{x\to 3+0} e^{\frac{x}{6-2x}} = 0.$$

В точке $x = 3$ функция имеет разрыв второго рода. Прямая $x = 3$ будет вертикальной асимптотой. Для построения графика найдём дополнительный предел:

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{6-2x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\frac{6}{x}-2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Следовательно, $y = \frac{1}{\sqrt{e}}$ – горизонтальная асимптота.




Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.