Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{x^3-4x^2-12x}$ на непрерывность на указанных промежутках: $[-8;-5]$, $(-3;2)$, $[4;7)$.

Решение

Функция разрывна в тех точках, для которых знаменатель равен 0. Найдём эти точки:

$$x^3-4x^2-12x=0$$
$$x\cdot(x^2-4x-12)=0$$
$$x_1=0$$
$$x^2-4x-12=0;\ D=64;\ x_2=\frac{4-8}{2}=-2;\ x_2=\frac{4+8}{2}=6.$$

Следовательно, функция определена и непрерывна на множестве $X=(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;6)\cup(6;+\infty)$.

При условии $x\in X$, получим:

$$f(x)=\frac{x^2-4x-12}{x^3-4x^2-12x}=\frac{x^2-4x-12}{x(x^2-4x-12)}=\frac{1}{x}.$$

Равенство $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеет место при $x\neq 0$, $x\neq -2$, $x\neq 6$.

Так как $[-8;-5]\subset X$, то на промежутке $[-8;-5]$ функция непрерывна.

Промежутку $(-3;2)$ принадлежат точки $x=-2$ и $x=0$, в которых функция не определена. В точке $x=-2$ получим:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0}\frac{1}{x}=-\frac{1}{2};\ \lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0}\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

Так как односторонние пределы существуют, конечны, равны между собой, но значение $f(-2)$ не определено, то $x=-2$ – точка разрыва первого рода (устранимый разрыв).

В точке $x=0$ получим:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty;\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Так как хоть один из односторонних пределов равен ∞, то $x=0$ – точка разрыва второго рода.

Промежутку $[4;7)$ принадлежит точка $x=6$, в которой функция не определена. В точке $x=6$ получим:

$$\lim_{x\to 6-0} f(x)=\lim_{x\to 6-0}\frac{1}{x}=\frac{1}{6};\ \lim_{x\to 6+0} f(x)=\lim_{x\to 6+0}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}.$$

Так как односторонние пределы существуют, конечны, равны между собой, но значение $f(6)$ не определено, то $x=6$ – точка разрыва первого рода (устранимый разрыв).

Ответ:

- На промежутке $[-8;-5]$ функция непрерывна.
- На промежутке $(-3;2)$ лежат две точки разрыва: $x=-2$ (точка «устранимого» разрыва) и $x=0$ (точка разрыва второго рода).
- На промежутке $[4;7)$ лежит одна точка разрыва: $x=6$ (точка «устранимого» разрыва).

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.