Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{|x+1|\cdot(x+3)}{x^3+4x^2+3x}$ и определите их типы.

Решение

Выясним, при каких значениях переменной x знаменатель x будет равен 0:

$$x^3+4x^2+3x=0$$

$$x(x^2+4x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+4x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Следовательно, функция определена при $x\in R\setminus\{-3;-1;0\}$, и исследовать на разрыв нужно точки $x=-3$, $x=-1$, $x=0$. При условии $x\in R\setminus\{-3;-1;0\}$ получим:

$$f(x)=\frac{|x+1|\cdot(x+3)}{x^3+4x^2+3x}=\frac{|x+1|\cdot(x+3)}{x(x+1)(x+3)}=\frac{|x+1|}{x(x+1)}=\frac{\operatorname{sgn}(x+1)\cdot(x+1)}{x(x+1)}=\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{x}$$

Рассмотрим точку $x=-3$.

$$\lim_{x\to-3-0} f(x)=\lim_{x\to-3-0}\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{x}=\lim_{x\to-3-0}\frac{-1}{x}=\frac{1}{3}$$
$$\lim_{x\to-3+0} f(x)=\lim_{x\to-3+0}\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{x}=\lim_{x\to-3+0}\frac{-1}{x}=\frac{1}{3}$$

Следовательно, $x=-3$ – точка разрыва первого рода (устранимый разрыв).

Рассмотрим точку $x=-1$.

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{x}=\lim_{x\to-1-0}\frac{-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{x}=\lim_{x\to-1-0}\frac{1}{x}=-1$$

Следовательно, в точке $x=-1$ функция терпит разрыв первого рода со скачком $\delta=|-1-1|=2$.

Рассмотрим точку $x=0$.

$$\lim_{x\to0-0} f(x)=\lim_{x\to0-0}\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{x}=\lim_{x\to0-0}\frac{1}{x}=-\infty;\ \lim_{x\to0+0} f(x)=\lim_{x\to0+0}\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{x}=\lim_{x\to0+0}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Следовательно, $x=0$ – точка разрыва второго рода.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.