Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Провести полное исследование функции $y = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ и построить её график.

1) Область определения и непрерывность.

Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Функция непрерывна на всей области определения.

2) Точки пересечения с осями координат

Пересечение с осью абсцисс

$$x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$$
$$x^3 - 2x^2 + x + 4x^2 - 8x + 4 = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 2x + 1) + 4 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$$
$$(x^2 - 2x + 1) \cdot (x + 4) = 0$$
$$(x-1)^2 (x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

График пересекает ось Ox в точках $(1;0)$, $(-4;0)$.

Пересечение с осью ординат

$$y(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 4 = 4$$

График пересекает ось Oy в точке $(0;4)$.

3) Интервалы знакопостоянства

Запишем функцию в таком виде: $y = (x-1)^2 (x+4)$.

Так как $(x-1)^2 > 0$ при всех $x \neq 1$, то знак функции при $x \neq 1$ будет совпадать с знаком $x+4$, т.е. если $x > -4$, $x \neq 1$, то $y > 0$. Если же $x < -4$, то $x + 4 < 0$, т.е. $y < 0$.

- Если $x \in (-\infty; -4)$, то $y < 0$.
- Если $x \in (-4;1) \cup (1;+\infty)$, то $y > 0$.

4) Чётность и нечётность

Область определения $D(y)$ симметрична относительно 0.

$$y(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 - 7 \cdot (-x) + 4 = -x^3 + 2x^2 + 7x + 4$$

Так как $y(-x) \neq -y(x)$ и $y(-x) \neq y(x)$, то данная функция ни чётная ни нечётная.

5) Периодичность

Функция непериодическая.

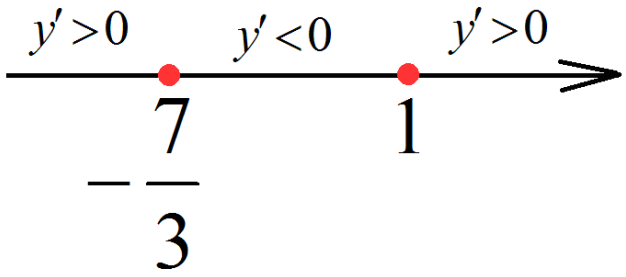
6) Интервалы монотонности и экстремумы

$$y' = \left(x^3\right)' + 2 \cdot \left(x^2\right)' - 7 \cdot x' + (4)' = 3x^2 + 2 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 4x - 7$$

$3x^2 + 4x - 7 = 0$

$D = 16 + 84 = 100$

$x_1 = \frac{-4-10}{6} = -\frac{7}{3};\ x_2 = \frac{-4+10}{6} = 1.$



- При $x \in \left(-\frac{7}{3}; 1\right)$ функция убывает.
- При $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right)$, $x \in (1; +\infty)$ функция возрастает.

$x_{max} = -\frac{7}{3}$ – точка максимума, $y_{max} = y\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{500}{27} \approx 18{,}52$.

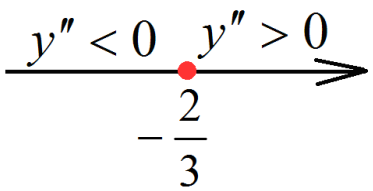
$x_{min} = 1$ – точка минимума, $y_{min} = y(1) = 0$.

7) Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y'' = \left(3x^2 + 4x - 7\right)' = 6x + 4$$

$6x + 4 = 0$

$x = -\frac{2}{3}$



- При $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ функция выпукла;
- При $x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ функция вогнута.

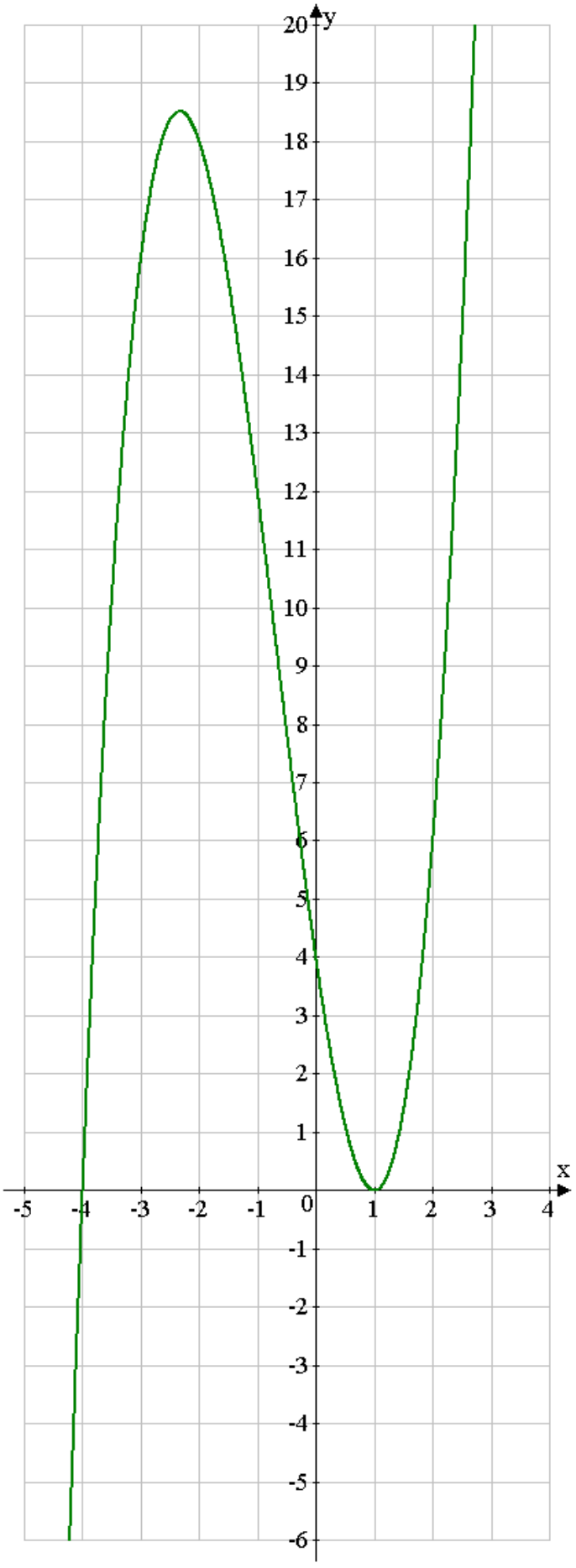
Так как $y\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{250}{27}$, то $\left(-\frac{2}{3};\frac{250}{27}\right)$ – точка перегиба.

8) Асимптоты

Вертикальных асимптот нет. Уравнение наклонной асимптоты ищем в виде $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-7x+4}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x^2+2x-7+\frac{4}{x}\right)=\infty$$

Наклонных асимптот нет.



Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.