Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ методами дифференциального исчисления и построить график.

1. *Область определения и непрерывность*

Это дробно-рациональная функция, которая не определена лишь в тех точках, в которых знаменатель равен 0:

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4$$
$$x_1=-2;\ x_2=2.$$

Область определения: $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

Функция непрерывна на всей области определения. Так как $\lim\limits_{x\to -2\pm 0} y(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} y(x)=\infty$, то $x=-2$ и $x=2$ – точки разрыва второго рода. Прямые $x=-2$ и $x=2$ будут вертикальными асимптотами.

2. *Пересечение с осями координат*

С осью Ox: $\dfrac{x}{x^2-4}=0$, $x=0$. Имеем точку $(0;0)$.

С осью Oy: $y(0)=\dfrac{0}{0-4}=0$. Имеем точку $(0;0)$.

3. *Проверка на чётность и нечётность.*

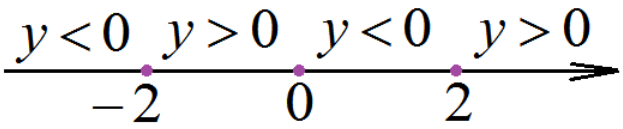
Область определения симметрична относительно начала координат. Найдём $y(-x)$:

$$y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-4}=-\frac{x}{x^2-4}=-y(x)$$

Так как область определения симметрична относительно начала координат и $y(-x)=-y(x)$, то функция является нечетной.

4. *Интервалы знакопостоянства*

$$y(x)=\frac{x}{x^2-4}=\frac{x}{(x-2)\cdot(x+2)}$$



- При $x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$ имеем $y(x)<0$
- При $x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$ имеем $y(x)>0$

5. Периодичность

Функция непериодическая.

6. *Интервалы монотонности и экстремумы*

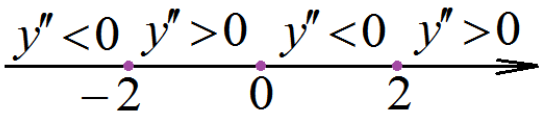
$$y'=\left(\frac{x}{x^2-4}\right)'=\frac{1\cdot(x^2-4)-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}=-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}.$$

Так как $y'(x)<0$ при всех $x\in D(y)$, то функция убывает на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$ и $(2;+\infty)$. Экстремумов нет.

7. *Интервалы выпуклости и вогнутости*:

$$y''=-\left(\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}\right)'=-\frac{2x\cdot(x^2-4)^2-(x^2+4)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=\frac{2x\cdot(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$2x\cdot(x^2+12)=0$$
$$x=0$$



- При $x\in(-\infty;-2)$ и $x\in(0;2)$ функция выпукла,
- При $x\in(-2;0)$ и $x\in(2;+\infty)$ функция вогнута.

$(0;0)$ – точка перегиба.

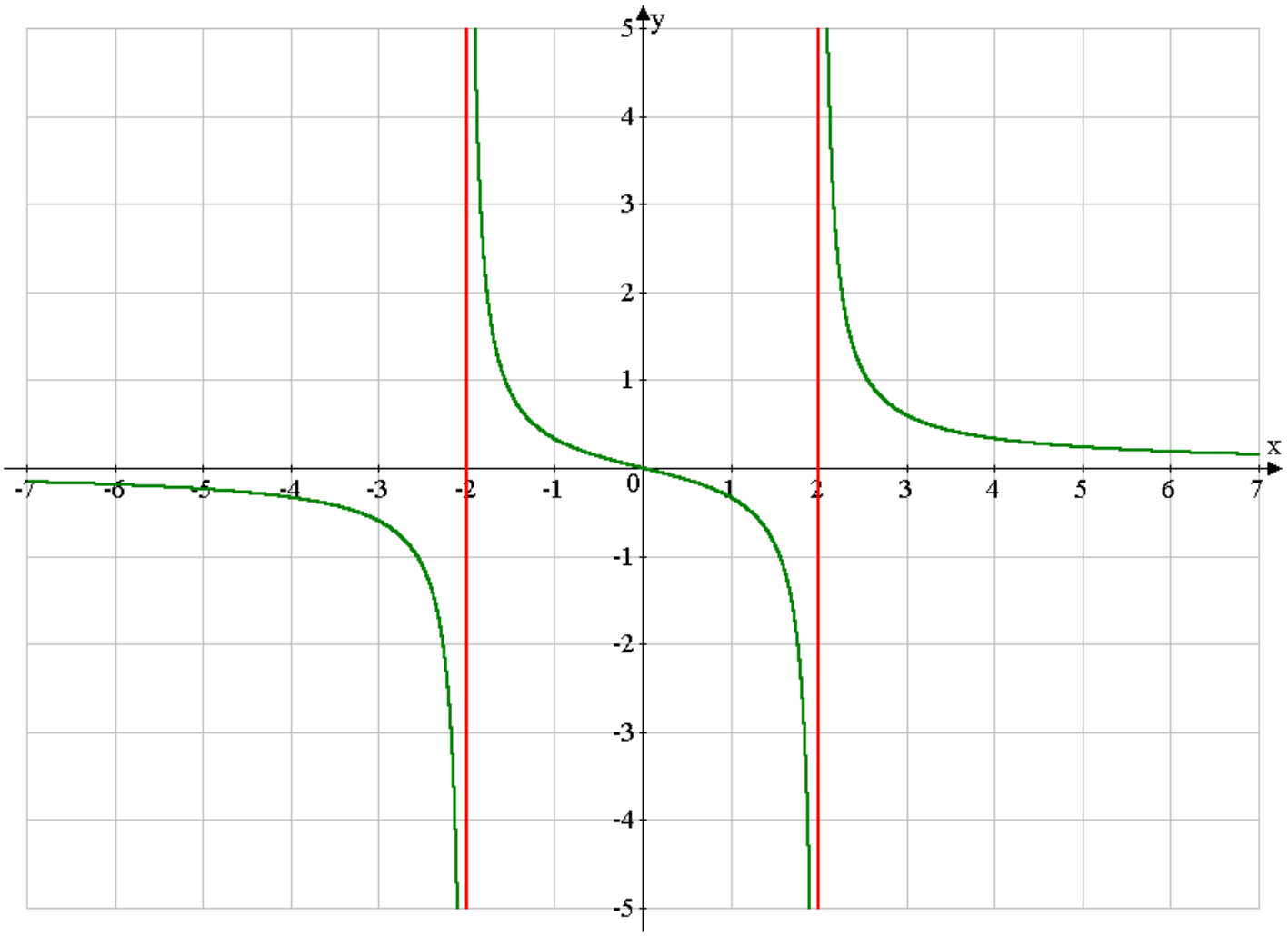
8. *Асимптоты*

Вертикальные асимптоты были найдены в пункте №1. Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-4}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=0$$

Следовательно, $y=0$ (ось Ox) – наклонная (горизонтальная) асимптота.



Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.