Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать функцию $y=\dfrac{e^{x-2}}{x-1}$ и построить её график.

Решение

1) Область определения и непрерывность.

Область определения представляет собой множество всех действительных чисел без точки $x=1$, в которой равен нулю знаменатель, т.е. $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} y(x)=\infty$, то $x=1$ – точка разрыва второго рода, а прямая $x=1$ будет вертикальной асимптотой.

2) Точки пересечения с осями координат

Пересечение с осью абсцисс

$$\frac{e^{x-2}}{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-2}=0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$$

Так как $e^{x-2}>0$, то равенство $e^{x-2}=0$ невозможно, т.е. пересечений с осью Ox нет.

Пересечение с осью ординат

$$y(0)=\frac{e^{-2}}{-1}=-\frac{1}{e^2}.$$

График пересекает ось Oy в точке $\left(0;-\dfrac{1}{e^2}\right)$.

3) Интервалы знакопостоянства

Так как $e^{x-2}>0$ при всех $x\in R$, то знак функции при $x\neq 1$ будет совпадать с знаком знаменателя $x-1$, т.е.

- При $x\in(-\infty;1)$, то $y<0$.
- При $x\in(1;+\infty)$, то $y>0$.

4) Чётность и нечётность

Область определения несимметрична относительно начала координат, поэтому функция ни чётная ни нечётная.

5) Периодичность

Если предположить, что функция периодическая, то существует такое число $T>0$, что $y(x)=y(x+T)$. Так как функция не определена в точке $x=1$, то она должна быть не определена и в точках $1+T$. Так как во всех точках, кроме $x=1$, функция определена, то получаем противоречие, которое говорит о непериодичности функции $y(x)$.

6) Интервалы монотонности и экстремумы

$$y'=\frac{e^{x-2}\cdot(x-1)-e^{x-2}}{(x-1)^2}=\frac{e^{x-2}\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$$

$\frac{e^{x-2}\cdot(x-2)}{(x-1)^2}=0,\ x-2=0,\ x=2.$

Так как $\frac{e^{x-2}}{(x-1)^2}>0$ при всех $x\in D(y)$, то знак y' на области определения совпадает с знаком $(x-2)$. Следовательно, при $x<2$, $x\neq 1$ имеем $y'<0$, а при $x>2$ имеем $y'>0$.

- При $x\in(-\infty;1)$ и $x\in(1;2)$ функция убывает,
- При $x\in(2;+\infty)$ функция возрастает.

$x_{\min}=2$ – точка минимума, $y_{\min}=y(2)=1$.

7) Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y''=\frac{\left(e^{x-2}\cdot(x-2)+e^{x-2}\right)\cdot(x-1)^2-e^{x-2}\cdot(x-2)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=e^{x-2}\cdot\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^3}=e^{x-2}\cdot\left((x-2)^2+1\right)\cdot\frac{1}{(x-1)^3}$$

Так как $e^{x-2}\cdot\left((x-2)^2+1\right)>0$ при всех $x\in R$, то точек, в которых $y''=0$, нет. Знак y'' совпадает с знаком знаменателя, т.е. $(x-1)^3$. Следовательно, при $x<1$ имеем $y''<0$, при $x>1$ имеем $y''>0$.

- При $x\in(-\infty;1)$ функция выпукла,
- При $x\in(1;+\infty)$ функция вогнута.

Точек перегиба нет.

8) Асимптоты

В пункте №1 была найдена вертикальная асимптота $x=1$. Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y=kx+b$. Если $x\to+\infty$, то применяя правило Лопиталя, получим:

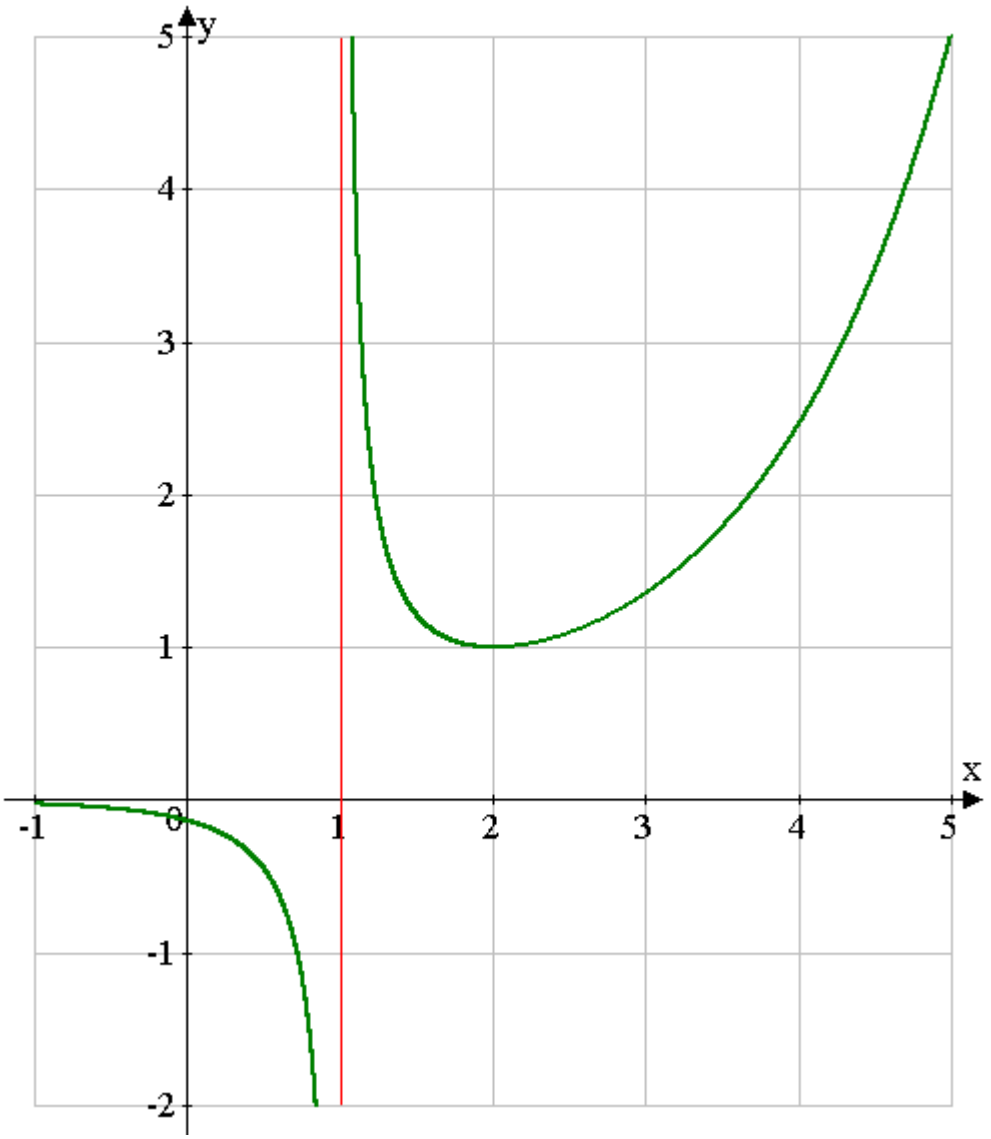
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-2}}{x^2-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-2}}{2x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-2}}{2}=+\infty.$$

Если $x\to-\infty$, то:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-2}}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x^2-x)\cdot e^{-x+2}}=0.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-2}}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-1)\cdot e^{-x+2}}=0\,.$$

Следовательно, прямая $y=0$ (ось Ox) будет наклонной (горизонтальной) асимптотой.



Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.