Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Проведите полное исследование функции $y=\ln\left(x^2-1\right)^2$ и начертите её график.

Решение

1) Область определения и непрерывность.

Так как $\left(x^2-1\right)^2\geq 0$ при всех $x\in R$, то требуется исключить лишь точки, в которых $x^2-1=0$.

$$x^2-1=0;$$
$$x_1=-1;\ x_2=1.$$

Область определения: $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Так как $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} y(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} y(x)=\infty$, то $x=-1$ и $x=1$ – точки разрыва второго рода. Прямые $x=-1$ и $x=1$ – вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат

Пересечение с осью абсцисс

$$\ln\left(x^2-1\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=-1\\x^2-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

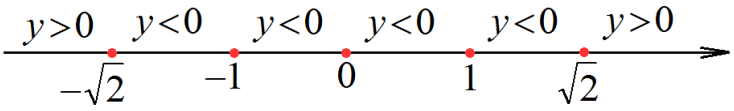
График пересекает ось Ox в точках $(0;0)$, $\left(-\sqrt{2};0\right)$, $\left(\sqrt{2};0\right)$.

Пересечение с осью ординат

$$y(0)=\ln\left(0^2-1\right)^2=0$$

График пересекает ось Oy в точке $(0;0)$.

3) Интервалы знакопостоянства



- При $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ имеем $y(x)>0$.
- При $x\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$ имеем $y(x)<0$.

4) Чётность и нечётность

Область определения $D(y)$ симметрична относительно 0. Найдём $y(-x)$:

$$y(-x)=\ln\left((-x)^2-1\right)^2=\ln\left(x^2-1\right)^2=y(x)$$

Так как $y(-x)=y(x)$ и область определения симметрична относительно нуля, то функция чётная.

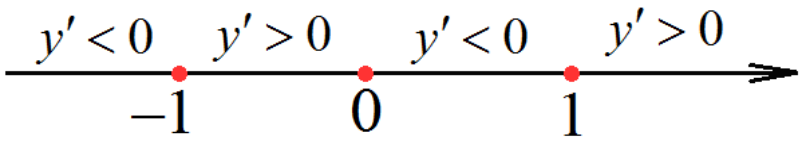
5) Периодичность

Если предположить, что функция периодическая, то существует такое число $T>0$, что для любого значения $x\in D(y)$ имеем $y(x)=y(x+T)$. Так как $y\left(\sqrt{2}\right)=0$, то должно быть выполнено равенство $y\left(\sqrt{2}+T\right)=0$. Однако ни при каком $x>\sqrt{2}$ равенство $y(x)=0$ не будет истинным. Полученное противоречие говорит о непериодичности функции $y(x)$.

6) Интервалы монотонности и экстремумы

$$y'=\frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x=\frac{4x}{x^2-1}.$$

$\frac{4x}{x^2-1}=0;\ 4x=0;\ x=0.$



- При $x\in(-\infty;-1)$ и $x\in(0;1)$ функция убывает,
- При $x\in(-1;0)$ и $x\in(1;+\infty)$ функция возрастает.

$x=0$ – точка максимума, $y_{\max}=y(0)=0$.

7) Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y''=\left(\frac{4x}{x^2-1}\right)'=4\cdot\frac{x^2-1-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=-4\cdot\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Так как $y''<0$ при всех $x\in D(y)$, то функция выпукла на интервалах $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ и $(1;+\infty)$. Точек перегиба нет.

8) Асимптоты

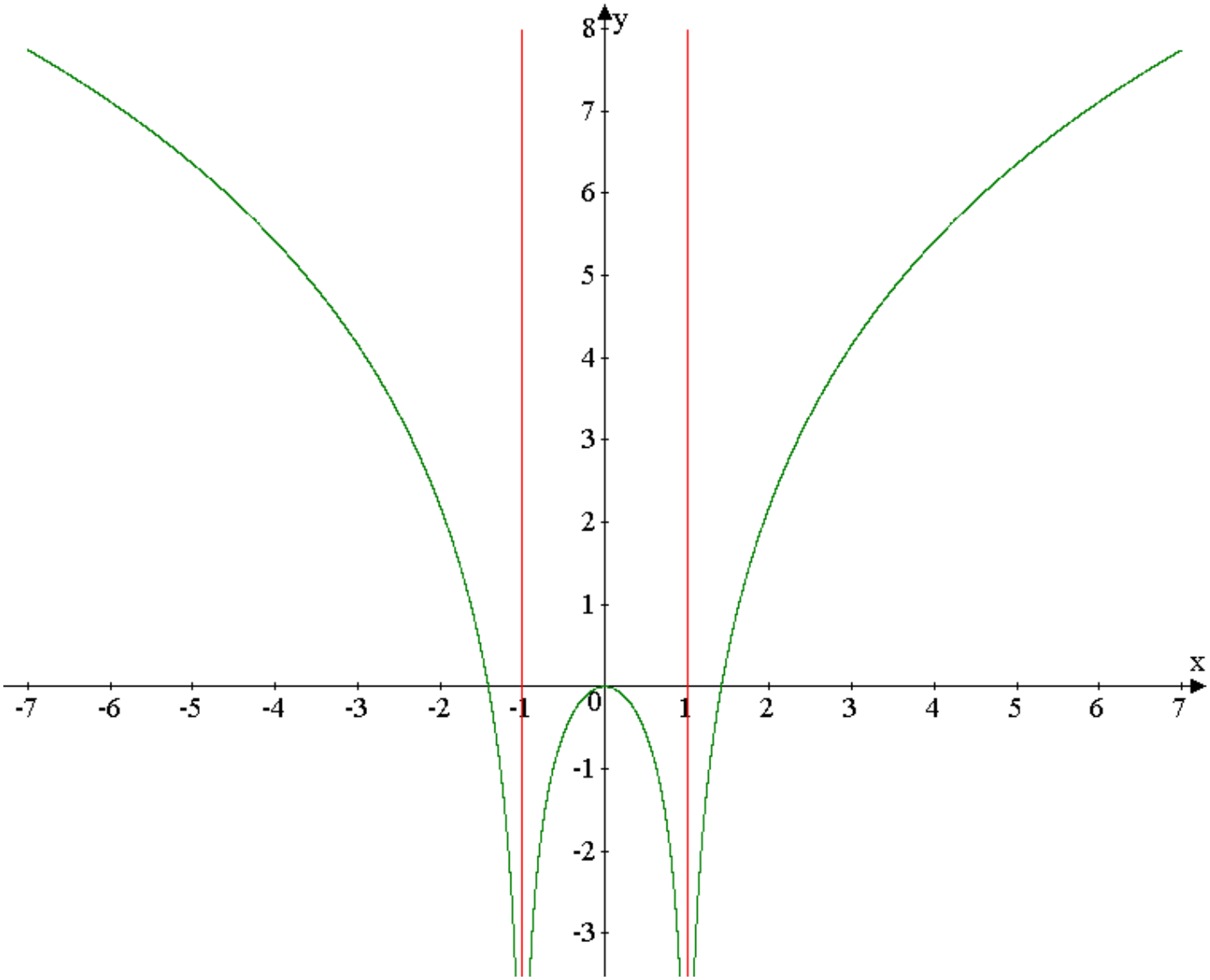
Вертикальные асимптоты были найдены в пункте №1. Уравнение наклонной асимптоты ищем в виде $y=kx+b$. Применим правило Лопиталя для нахождения k:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2-1\right)^2}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-1}=0$$

Так как $k=0$, то

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(x^2-1\right)^2\right)=+\infty$$

Наклонных асимптот нет.



Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.