Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ методами дифференциального исчисления и построить её график.

1) Область определения и непрерывность.

Функция будет не определена лишь при тех значениях переменной x, для которых знаменатель равен 0:

$$\sin x+\cos x=0$$
$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0;\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0;\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z.$$

Область определения будет состоять из интервалов вида $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, где $n\in Z$, т.е. $D(y)=\bigcup\limits_{n\in Z}\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{3\pi}{4}+\pi n\right)$.

Так как $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}+\pi n} y(x)=\infty$, то в точках $x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi n$ функция терпит разрывы второго рода, а прямые $x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi n$ – вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат

Пересечение с осью абсцисс

Пересечений с осью Ox нет, так как числитель дроби $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ не может равняться 0.

Пересечение с осью ординат

Так как $y(0)=1$, то график пересекает ось Oy в точке $(0;1)$

3) Чётность и нечётность

Область определения несимметрична относительно начала координат, поэтому функция ни чётная ни нечётная.

4) Периодичность

Функция является периодической с периодом $T=2\pi$. Ввиду периодичности можно исследовать функцию на интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

5) Интервалы знакопостоянства

Запишем функцию в таком виде: $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

Если $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$, то $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$, т.е. $y>0$. При $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}\right)$ имеем $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$, т.е. $y<0$. С учётом периодичности получим:

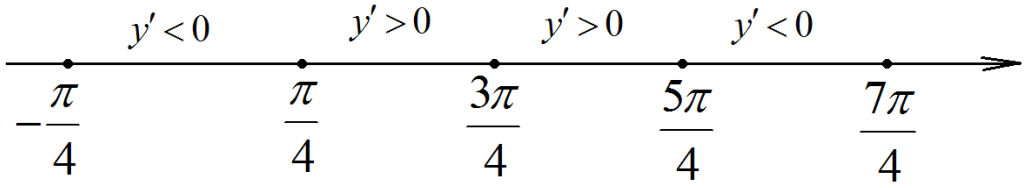
- При $x\in\bigcup\limits_{n\in Z}\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$ имеем $y<0$.
- При $x\in\bigcup\limits_{n\in Z}\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$ имеем $y>0$.

6) Интервалы монотонности и экстремумы

$$y'=\left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)'=-\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\cdot(\cos x-\sin x)=\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

На интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}\right)$ получим:

$$\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\sin x=\cos x\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}\\ x=\dfrac{5\pi}{4}\end{array}\right.$$



- При $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $x\in\left(\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}\right)$ функция убывает.
- При $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right)$ функция возрастает.

$x_{\min}=\dfrac{\pi}{4}$ – точка минимума, $y_{\min}=y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$x_{\max}=\dfrac{5\pi}{4}$ – точка максимума, $y_{\max}=y\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7) Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y''=\left(\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}\right)'=\frac{(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)\cdot 2(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^4}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2+2\cdot(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^3}=\frac{1+2\sin x\cos x+2\cdot(1-2\sin\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}=\frac{3-\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^3}$$

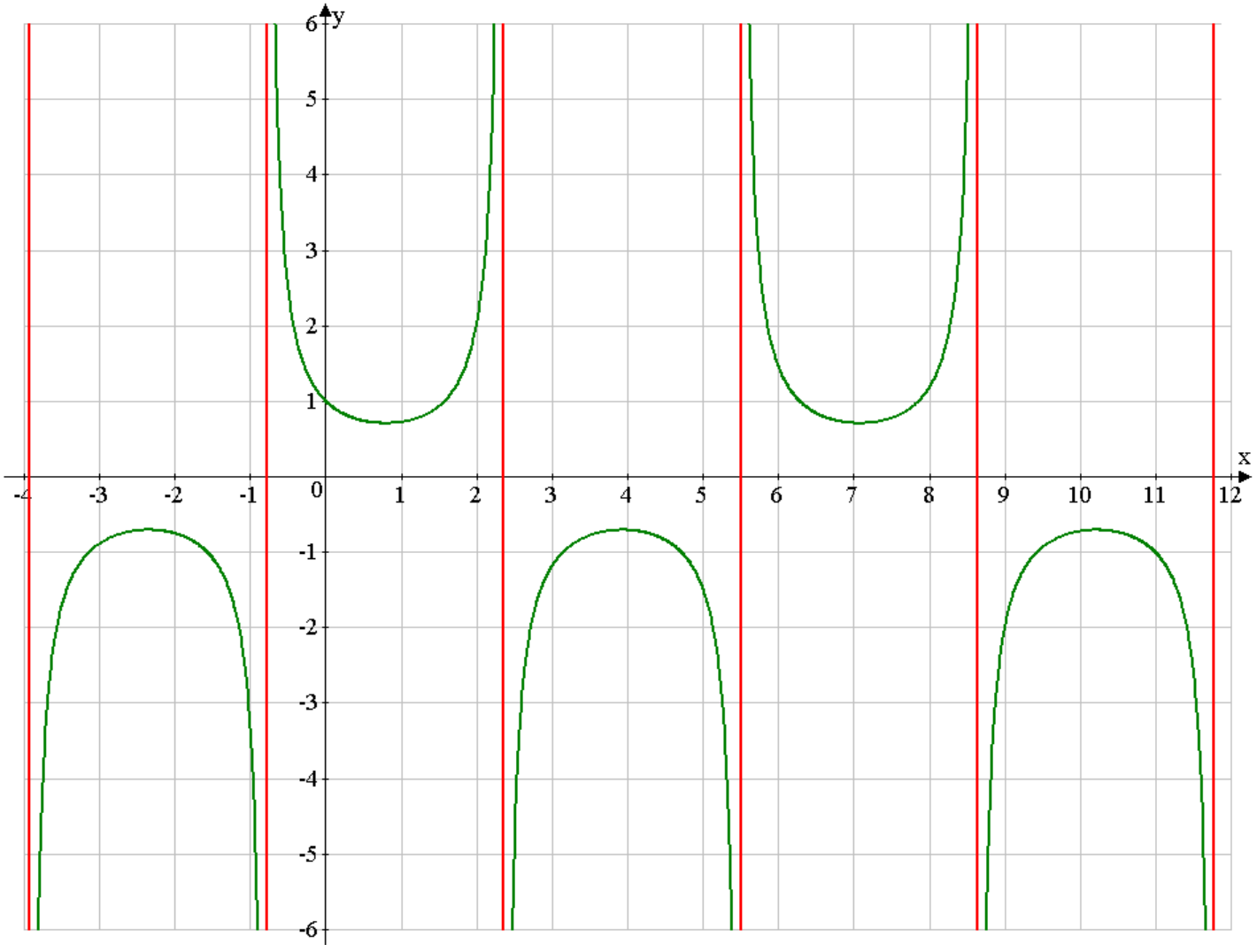
Так как $\sin 2x\le 1$, то $3-\sin 2x>0$. Следовательно, знак y'' совпадает с знаком знаменателя. Если $x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$, то $y''>0$, а при $x\in\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$ имеем $y''<0$.

- При $x\in\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$ функция выпукла.
- При $x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ функция вогнута.

Точек перегиба нет.

8) Асимптоты

Вертикальные асимптоты были указаны в пункте №1. Наклонных асимптот нет.



Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.