Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Провести исследование функции $y = x + 2\operatorname{arctg} x$ и построить график.

1. *Область определения и непрерывность*

Обе функции (x и $2\operatorname{arctg} x$) определены и непрерывны при $x \in R$. Следовательно, и функция $y(x)$ определена и непрерывна при $x \in R$, т.е. область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. *Точки пересечения с осями координат*

Пересечение с осью Ox

$$x + 2\operatorname{arctg} x = 0.$$

При $x = 0$ имеем $x + 2\operatorname{arctg} x = 0 + 2\operatorname{arctg} 0 = 0$, т.е. $x = 0$ – решение записанного выше уравнения. Покажем, что иных решений, кроме $x = 0$, уравнение $x + 2\operatorname{arctg} x = 0$ не имеет. Если $x > 0$, то $2\operatorname{arctg} x > 0$, поэтому $x + 2\operatorname{arctg} x > 0$, т.е. $y(x) > 0$. Если $x < 0$, то $2\operatorname{arctg} x < 0$, поэтому $x + 2\operatorname{arctg} x < 0$, т.е. $y(x) < 0$. Таким образом, равенство $x + 2\operatorname{arctg} x = 0$ возможно лишь при $x = 0$.

График функции пересекает ось Ox в точке $(0;0)$.

Пересечение с осью Oy

Так как $y(0) = 0$, то график пересекает ось Oy в точке $(0;0)$.

3. *Промежутки знакопостоянства*

Если $x > 0$, то $2\operatorname{arctg} x > 0$, поэтому $x + 2\operatorname{arctg} x > 0$, т.е. $y(x) > 0$. Если $x < 0$, то $2\operatorname{arctg} x < 0$, поэтому $x + 2\operatorname{arctg} x < 0$, т.е. $y(x) < 0$.

- При $x \in (-\infty; 0)$ имеем $y(x) < 0$
- При $x \in (0; +\infty)$ имеем $y(x) > 0$

4. *Проверка на чётность и нечётность*

Область определения данной функции симметрична относительно начала координат, поэтому проверим выполнение условий $y(-x) = y(x)$ или $y(-x) = -y(x)$:

$$y(-x) = -x + 2\operatorname{arctg}(-x) = -x - 2\operatorname{arctg} x = -(x + 2\operatorname{arctg} x) = -y(x)$$

Так как $y(-x) = -y(x)$, то функция является нечётной.

5. *Интервалы убывания и возрастания функции. Экстремумы.*

$$y' = \left(x + 2\operatorname{arctg} x\right)' = 1 + 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Так как $\frac{1}{1+x^2} > 0$ при любом $x \in R$, то $y'(x) > 0$ при любом $x \in D(y)$. Следовательно, функция возрастает на R. Экстремумов нет.

6. *Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба*

$$y'' = \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)' = 0 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} \cdot 2x\right) = -\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Так как $\left(1+x^2\right)^2 > 0$ при любом $x \in D(y)$, то знак y'' зависит только от знака числителя: при $x < 0$ имеем $y'' > 0$, а при $x > 0$ имеем $y'' < 0$.

- При $x \in (-\infty; 0)$ функция вогнута,
- При $x \in (0; +\infty)$ функция выпукла.

$(0;0)$ – точка перегиба.

7. *Асимптоты*

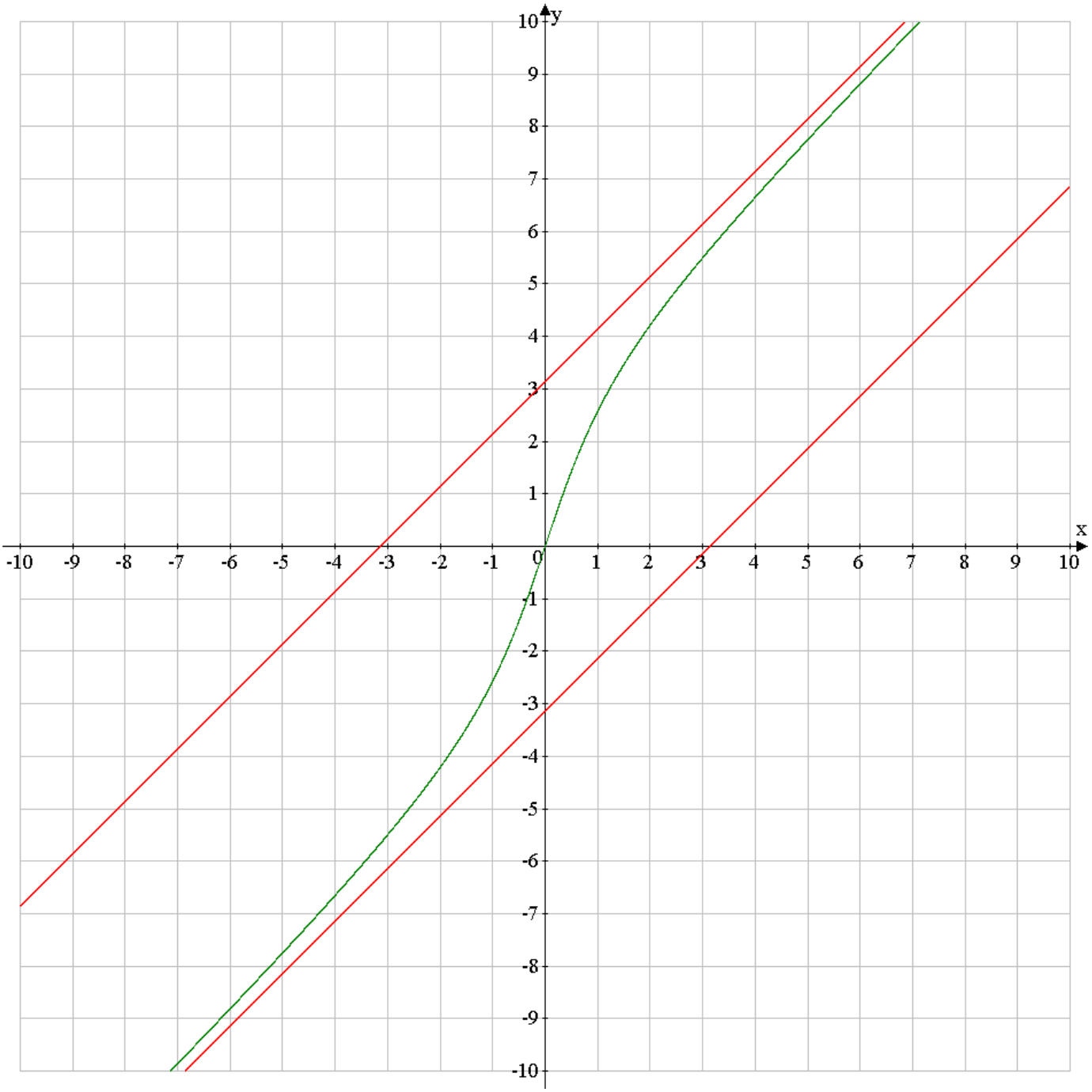
Вертикальных асимптот нет. Уравнение наклонных асимптот будем искать в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty}\left(y(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2\operatorname{arctg} x\right)$$

Если $x \to -\infty$, то $b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2\operatorname{arctg} x\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

Если $x \to +\infty$, то $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\operatorname{arctg} x\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

Наклонные асимптоты: $y = x - \pi$ и $y = x + \pi$.



Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.