Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба графика функции:
1) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, 2) $y=e^{2x-x^2}$.

Решение

1) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

Найдём область определения заданной функции:

$$-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\le 1 \Leftrightarrow |2x|\le x^2+1 \Leftrightarrow x^2-|2x|+1\ge 0 \Leftrightarrow |x|^2-2\cdot|x|+1\ge 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2\ge 0$$

Неравенству $(|x|-1)^2\ge 0$ удовлетворяют все значения $x\in R$, поэтому и исходное неравенство $-1\le\dfrac{2x}{1+x^2}\le 1$ будет выполнено при всех $x\in R$, а значит область определения такова: $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{(1-x^2)^2}}{1+x^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\cdot(1+x^2)}=\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|\cdot(1+x^2)}$$

Если $1-x^2>0$, т.е. $x\in(-1;1)$, то $1-x^2>0$, поэтому $|1-x^2|=1-x^2$, значит $y'=\dfrac{2}{1+x^2}$. В этом случае $y''=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$. При $-1<x<0$ имеем $y''>0$, поэтому при $x\in(-1;0)$ функция вогнута. При $0<x<1$ имеем $y''>0$, т.е. при $x\in(0;1)$ функция выпукла. Точка $(0;0)$ является точкой перегиба.

Если $1-x^2<0$, т.е. $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то $|1-x^2|=-(1-x^2)=x^2-1$, поэтому $y'=-\dfrac{2}{1+x^2}$. Отсюда следует, что $y''=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$. При $x<-1$ имеем $y''<0$, а при $x>1$ имеем $y''>0$. При $x\in(-\infty;-1)$ функция выпукла, а при $x\in(1;+\infty)$ функция вогнута.

Отдельно рассмотрим случаи $x=-1$ и $x=1$. Если $x<-1$, то $y''<0$, а если $-1<x<0$, то $y''>0$, т.е. y'' меняет знак при переходе через точку $x=-1$. Однако в этой точке получим:

$$\lim_{x\to -1-0}y'(x)=\lim_{x\to -1-0}\left(-\frac{2}{1+x^2}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to -1+0}y'(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{2}{1+x^2}=1$$

Следовательно, точка $x=-1$ не является точкой перегиба (это угловая точка). Аналогично точкой перегиба не будет и $x=1$ (это тоже угловая точка).

Ответ: функция выпукла при $x\in(-\infty;-1)$ и $x\in(0;1)$; функция вогнута при $x\in(-1;0)$ и $x\in(1;+\infty)$. Точка перегиба: $(0;0)$.

2) $y=e^{2x-x^2}$

Область определения: $D(y)=R$.

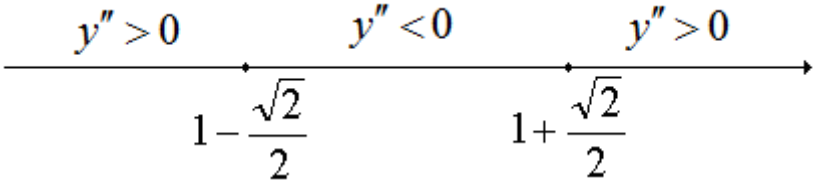
$y'=(2-2x)\cdot e^{2x-x^2}$.

$y''=-2e^{2x-x^2}+(2-2x)^2\cdot e^{2x-x^2}=e^{2x-x^2}\cdot\left(-2+(2-2x)^2\right)=2e^{2x-x^2}\cdot\left(2x^2-4x+1\right)$

$$2x^2-4x+1=0;$$

$$x_1=1-\frac{\sqrt{2}}{2};\ x_2=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Так как $2\cdot e^{2x-x^2}>0\ \ \forall x\in R$, то знак второй производной будет зависеть только от знака выражения $2x^2-4x+1$.



- При $x\in\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $x\in\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ функция вогнута.
- При $x\in\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ функция выпукла.

$x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ – абсциссы точек перегиба графика функции.

$$y\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{e}$$

$$y\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{e}$$

Следовательно, точки $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$, $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$ являются точками перегиба графика функции.

Ответ: функция выпукла при $x\in\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; функция вогнута при $x\in\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $x\in\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$; точки перегиба: $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$, $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.