Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти длину промежутка, содержащего все возможные значения α, при которых функция $y=-3x^4+2\alpha x^3-8x^2+2$ является выпуклой вверх на всей числовой оси.

Решение

При любом значении $\alpha\in R$ имеем такую область определения заданной функции: $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

$$y'=-3\cdot 4x^3+2\alpha\cdot 3x^2-8\cdot 2x+0=-12x^3+6\alpha x^2-16x$$
$$y''=-12\cdot 3x^2+6\alpha\cdot 2x-16=-36x^2+12\alpha x-16$$

Данная функция будет выпуклой вверх на всей числовой оси, если $y''\le 0$ при всех $x\in R$.

$$y''\le 0 \Leftrightarrow -36x^2+12\alpha x-16\le 0 \Leftrightarrow 9x^2-3\alpha x+4\ge 0$$

Последнее неравенство будет истинным при всех $x\in R$ лишь только дискриминант квадратного трёхчлена $9x^2-3\alpha x+4$ будет неположительным:

$$D\le 0 \Leftrightarrow 9\alpha^2-4\cdot 9\cdot 4\le 0 \Leftrightarrow \alpha^2-16\le 0 \Leftrightarrow \alpha^2\le 16 \Leftrightarrow -4\le\alpha\le 4$$

Следовательно, все искомые значения α принадлежат отрезку $[-4;4]$. Длина этого отрезка такова:

$$L=4-(-4)=8.$$

Ответ: 8.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.