Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать функции на экстремум и монотонность:

1) $y=\sqrt[3]{x^2+4x+3}$; 2) $y=-\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$; 3) $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$.

Решение

1) $y=\sqrt[3]{x^2+4x+3}$

Область определения функции $y=\sqrt[3]{x^2+4x+3}$ такова: $D(y)=R$.

$$y'=\left(\left(x^2+4x+3\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+4x+3\right)^2}}\cdot(2x+4)=\frac{2x+4}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+4x+3\right)^2}}$$

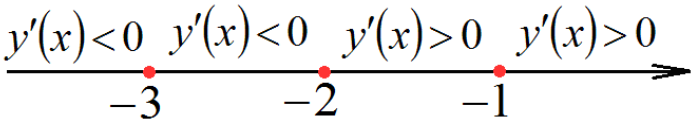
Найдём точки, принадлежащие области определения, в которых $y'=0$:

$$2x+4=0;\ x=-2.$$

Найдём точки, принадлежащие области определения, в которых y' не существует:

$$x^2+4x+3=0$$
$$D=4;\ x_1=-3;\ x_2=-1.$$

Критические точки: $x=-2$, $x=-3$, $x=-1$.



- При $x\in(-\infty;-2)$ функция убывает;
- При $x\in(-2;+\infty)$ функция возрастает.

$x_{\min}=-2$ – точка минимума, $y_{\min}=y(-2)=-1$.

2) $y=-\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$

Функция не определена для тех значений x, для которых знаменатель равен 0:

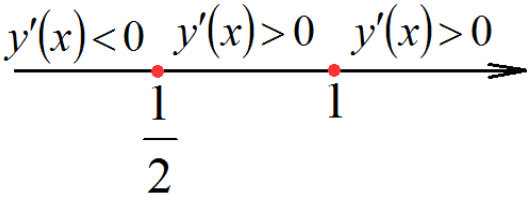
$$x-1=0$$
$$x=1$$

Область определения заданной функции такова: $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

$$y' = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{-2(x-1)}}{x-1}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2e^{-2(x-1)}(x-1)-e^{-2(x-1)}}{(x-1)^2} = \frac{e^{-2(x-1)}(2x-1)}{2(x-1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)^2} > 0$ при любом значении x из области определения, то знак y' на области определения совпадает с знаком $2x-1$.



- При $x \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ функция убывает;
- При $x \in \left(\frac{1}{2};1\right)$ и $x \in (1;+\infty)$ функция возрастает.

$x_{\min} = \frac{1}{2}$ – точка минимума, $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = e$.

3) $y = \ln\frac{x}{x+5} - 1$

Найдём область определения заданной функции:

$$\frac{x}{x+5} > 0 \Leftrightarrow x(x+5) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -5 \\ x > 0 \end{array}\right.$$

Область определения: $D(y) = (-\infty;-5)\cup(0;+\infty)$.

$$y' = \frac{x+5}{x}\cdot\frac{x+5-x}{(x+5)^2} = \frac{5}{x(x+5)}.$$

Так как на всей области определения $x(x+5) > 0$, то имеем $y' > 0$ при всех $x \in D(y)$. Значит, функция возрастает на интервалах $(-\infty;-5)$ и $(0;+\infty)$. Точек экстремума нет.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.