Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Доказать, что функции $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ и $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ эквивалентны при $x\to+\infty$.

Решение

Функции будут эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\dfrac{x}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}}=\sqrt{\frac{1+0}{1+\sqrt{0+0}}}=1$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то функции $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ и $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ эквивалентны при $x\to+\infty$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.