Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}$, используя эквивалентности.

Решение

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}=\left[\begin{array}{l}t=x-\dfrac{\pi}{2};\\ t\to 0.\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{6\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(3t+\frac{3\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}(\cos t)^{6\operatorname{ctg}t\cdot\operatorname{ctg}3t}=\lim_{t\to 0}e^{6\operatorname{ctg}t\cdot\operatorname{ctg}3t\cdot\ln(\cos t)}$$

Отдельно рассмотрим предел степени:

$$\lim_{t\to 0}\left(6\operatorname{ctg}t\cdot\operatorname{ctg}3t\cdot\ln(\cos t)\right)=\lim_{t\to 0}\left(6\cdot\frac{\ln(1+\cos t-1)}{\operatorname{tg}t\operatorname{tg}3t}\right)=\left[\begin{array}{l}\ln(1+\cos t-1)\sim\cos t-1\\ \operatorname{tg}t\sim t\\ \operatorname{tg}3t\sim 3t\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(6\cdot\frac{\cos t-1}{t\cdot 3t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(-2\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}\right)=\left[1-\cos t\sim\frac{t^2}{2}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{-2\cdot\frac{t^2}{2}}{t^2}=-1$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

Ответ: $\dfrac{1}{e}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.