Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t; \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t. \end{cases}$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

Решение

$x_t' = -\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t;\ y_t' = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t.$

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = \left(-\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin^2 t - 2\sin t \sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos^2 2t\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos t\right) = \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{4} \le \frac{t}{2} \le \frac{3\pi}{4}$, поэтому $\sin\frac{t}{2} > 0$ и $\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = \sin\frac{t}{2}$.

$$L = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin\frac{t}{2}\,dt = -2\cos\frac{t}{2}\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $L = 2\sqrt{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.