Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти длину дуги линии $r = 4(1-\sin\varphi),\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

Решение

$r' = -4\cos\varphi;$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = 4\cdot\sqrt{1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi} = 4\cdot\sqrt{2-2\sin\varphi} = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\sin\varphi}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin\varphi}\,d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{1-\sin\varphi}\cdot\sqrt{1+\sin\varphi}}{\sqrt{1+\sin\varphi}}\,d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{1+\sin\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\sin\varphi}}\,d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(1+\sin\varphi)}{\sqrt{1+\sin\varphi}} = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d(1+\sin\varphi) = 8\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sin\varphi}\Big|_0^{\pi/6} = 8\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $8\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.