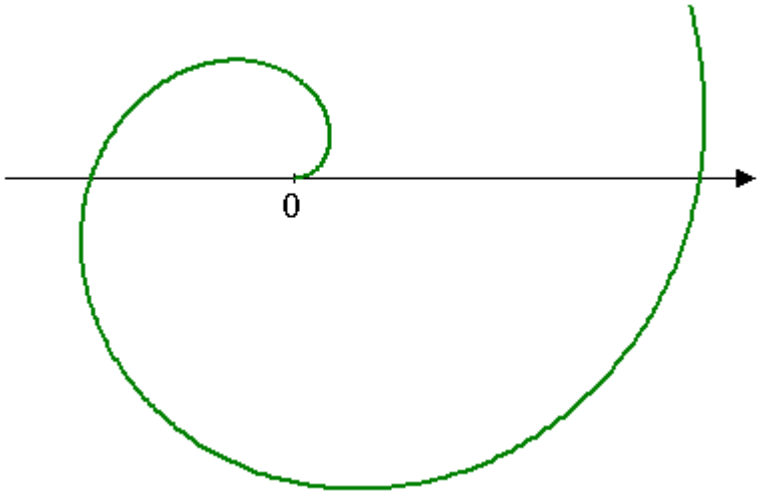
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить длину дуги одного оборота спирали Архимеда $\rho = 3\varphi$.

Решение



Один оборот спирали соответствует изменению угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(3\varphi)^2 + 3^2}\, d\varphi = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1} d\varphi = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{\varphi^2+1};\ du = \dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}. \\ dv = d\varphi;\ v = \varphi. \end{array}\right] = \varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}} d\varphi =$$

$$= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\varphi^2+1} - \frac{1}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right) d\varphi = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1} d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1} d\varphi + \ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right\|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1} d\varphi + \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)$$

$$2\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1} d\varphi = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1} d\varphi = \pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)$$

$$L = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1} d\varphi = 3\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{3}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)$$

Ответ: $L = 3\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{3}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.