Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

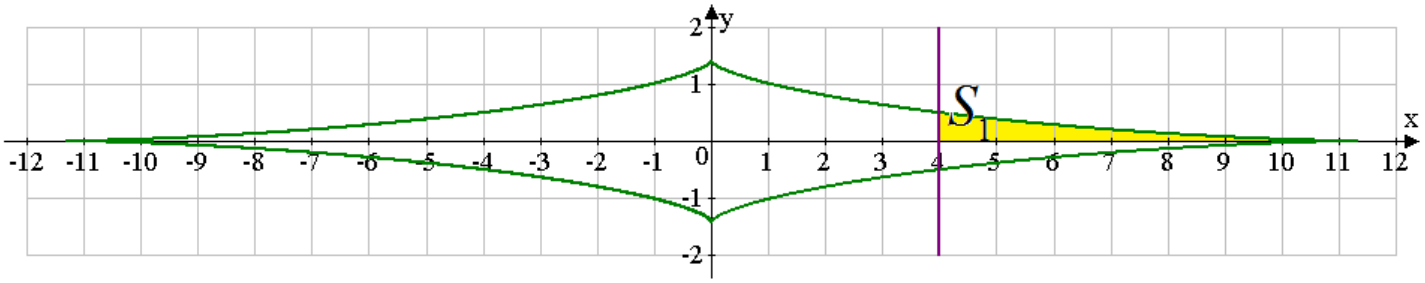
Найти площадь, ограниченную линией $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$, $x \geq 4$.

Решение

Заданные уравнения описывают вытянутую астроиду (эволюту эллипса). Кривая симметрична относительно осей координат и относительно начала координат. Пусть S_1 – часть площади, расположенная над осью Ox. Найдём значения параметра t, при которой прямая $x = 4$ пересекает кривую над осью Ox:

$$4 = 8\sqrt{2}\cos^3 t,\ \cos^3 t = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как для первой четверти имеем $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, то для точки пересечения получим $t = \frac{\pi}{4}$.



Так как кривая симметрична относительно оси Ox, то искомая площадь равна удвоенной площади S_1:

$$S = 2S_1 = 2\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sqrt{2}\sin^3 t\cdot 24\sqrt{2}\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt = 96\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t dt = 96\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cdot(\sin t\cos t)^2 dt =$$

$$= 96\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cdot\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = 24\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cdot\sin^2 2t dt = 24\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}dt = 6\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)\cdot(1-\cos 4t)dt =$$

$$= 6\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t-\cos 2t+\cos 2t\cos 4t)dt = 6\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos 4t-\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt =$$

$$= 3\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2-2\cos 4t-\cos 2t+\cos 6t)dt = 3\cdot\left(2t-\frac{\sin 4t}{2}-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 6t}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{3\pi}{2}-2.$$

Ответ: $S = \frac{3\pi}{2} - 2$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.