Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

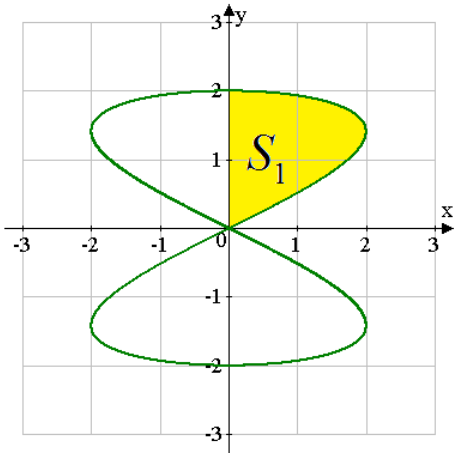
Найти площадь, ограниченную графиком $\begin{cases} x = 2\sin 2t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

Решение

Для определения формы кривой запишем её в явном виде:

$$\begin{cases} x = 4\sin t\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 16\sin^2 t\cos^2 t \\ y^2 = 4\sin^2 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 16\sin^2 t\cdot\left(1-\sin^2 t\right) \\ \dfrac{y^2}{4} = \sin^2 t \end{cases} \qquad x^2 = y^2\cdot\left(4-y^2\right)$$

Кривая $x^2 = y^2\cdot\left(4-y^2\right)$ проходит через точку $(0;0)$. Если точка $(x_0;y_0)$ принадлежит кривой, то из равенств $(-x_0)^2 = x_0^2$ и $(-y_0)^2 = y_0^2$ имеем, что точки $(-x_0;y_0)$, $(x_0;-y_0)$, $(-x_0;y_0)$ тоже принадлежат данной кривой, т.е. кривая симметрична относительно осей координат и относительно начала координат. Для первой четверти получим: $x\ge 0$, $\sin 2t\ge 0$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$. Пусть S_1 – часть площади, расположенная в первой четверти, тогда ввиду симметрии кривой, получим: $S = 4S_1$.



$$S = 4S_1 = 4\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)\cdot x'(t)dt = 4\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin t\cdot 4\cos 2t dt = 32\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin t\cdot\cos 2t dt = 32\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2 t-1\right)d(\cos t) =$$

$$= 32\cdot\left(\frac{2\cos^3 t}{3}-\cos t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 32\cdot\left(0-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right) = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{32}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.