Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите площадь фигуры, ограниченной трёхлепестковой розой $r=6\sin 3\varphi$ и расположенной вне окружности $r=3$.

Решение

Для уравнения $r=6\sin 3\varphi$ имеем $\sin 3\varphi \ge 0$, т.е. $2\pi n \le 3\varphi \le \pi + 2\pi n$, $\frac{2\pi n}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$.

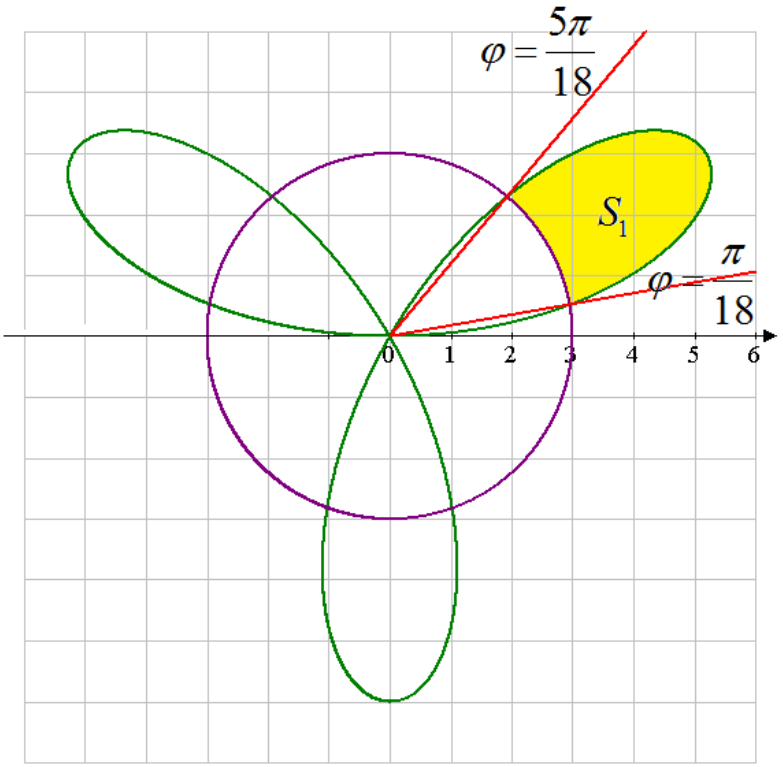
Если $n=0$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Если $n=1$, то $\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi$.

Если $n=2$, то $\frac{4\pi}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{3}$.

График функции $r=6\sin 3\varphi$ состоит из трёх однаковых лепестков. Графиком функции $r=3$ является окружность с центром в полюсе и радиусом 3. Найдём значения φ, при которых окружность пересекает первый лепесток ($0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$):

$$6\sin 3\varphi = 3,\ \sin 3\varphi = \frac{1}{2},\ \left[\begin{array}{l} 3\varphi = \frac{\pi}{6} \\ 3\varphi = \frac{5\pi}{6} \end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{18} \\ \varphi = \frac{5\pi}{18} \end{array}\right.$$



$$S = 3S_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} \left((6\sin 3\varphi)^2 - 3^2 \right) d\varphi = \frac{3}{2} \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} \left(36\sin^2 3\varphi - 9 \right) d\varphi = \frac{3}{2} \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} \left(36 \cdot \frac{1-\cos 6\varphi}{2} - 9 \right) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} (9 - 18\cos 6\varphi) d\varphi = \frac{3}{2} \cdot (9\varphi - 3\sin 6\varphi) \Big|_{\pi/18}^{5\pi/18} = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $S = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.