Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

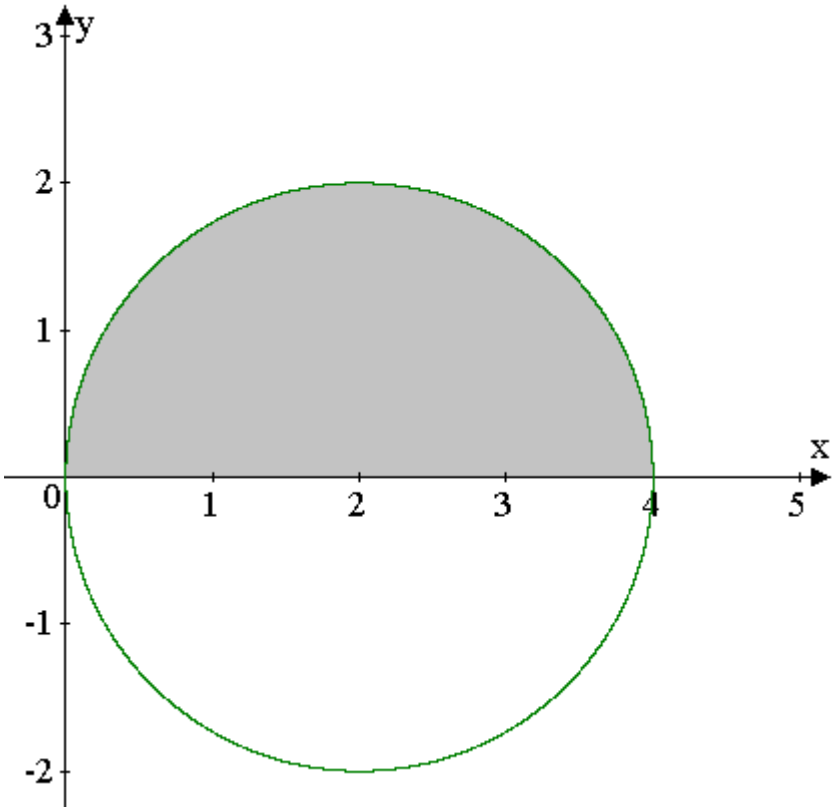
Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками $x^2+y^2-4y=0$ и $y=0$ $(y\ge 0)$.

Решение

$$x^2+y^2-4y=0;\ x^2+y^2-4y+4=4;\ x^2+(y-2)^2=4.$$

Имеем уравнение окружности с центром в точке $(0;2)$ и радиусом $R=2$. Перейдём в полярную систему координат:

$$x^2+y^2=4y\ \Rightarrow\ \rho^2=4\rho\cos\varphi;\ \rho=4\cos\varphi.$$



Так как $y\ge 0$, то $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cos^2\varphi d\varphi=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=4\cdot\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi.$$

Ответ: $S=2\pi$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.