Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x^4$.

Решение

Найдём точки пересечения данных кривых:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 \end{cases}$$

$$x^4 = x^2;\ x^4 - x^2 = 0;\ x^2\left(x^2 - 1\right) = 0;\ x^2(x-1)(x+1) = 0;\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Графики пересекаются в точках $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$.

Рассмотрим функцию $y = x^2$:

$$y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$$

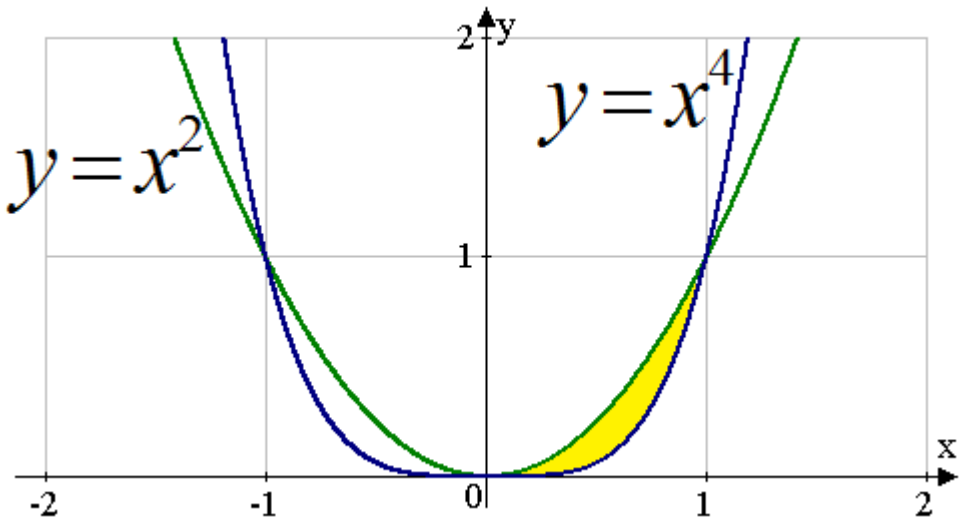
Следовательно, функция $y = x^2$ – чётная, т.е. её график симметричен относительно оси ординат.

Рассмотрим функцию $y = x^4$:

$$y(-x) = (-x)^4 = x^4 = y(x)$$

Следовательно, функция $y = x^4$ – чётная, т.е. её график симметричен относительно оси ординат.

Ввиду симметричности фигуры относительно оси Oy получим, что для нахождения объёма достаточно рассмотреть часть фигуры, расположенную в первой четверти:



Для первой четверти получим:

$$y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y}$$
$$y = x^4 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[4]{y}$$

Объём будет таким:

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left(\left(\sqrt[4]{y}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 \right) dy = \pi \cdot \int_0^1 \left(y^{\frac{1}{2}} - y \right) dy = \pi \cdot \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 =$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.