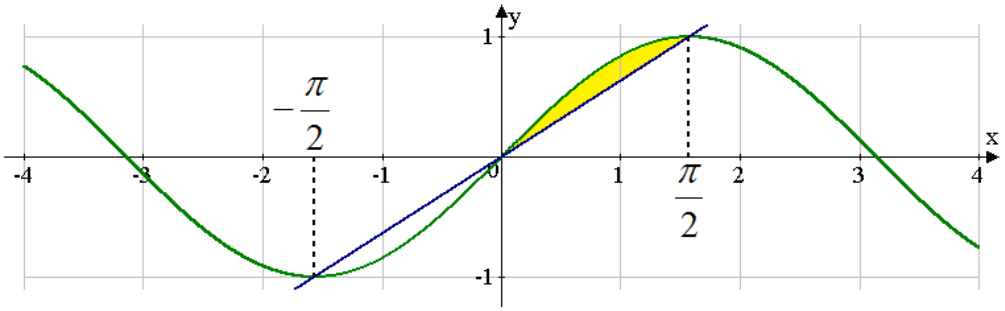
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}\cdot x$. Построить чертеж.

Решение

Прямая $y=\frac{2}{\pi}\cdot x$ проходит через точки $(0;0)$, $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$. Так как $\sin 0=0$ и $\sin\frac{\pi}{2}=1$, то через эти же точки проходит график функции $y=\sin x$. Так как функции $y=\sin x$ и $y=\frac{2}{\pi}\cdot x$ нечётные, то их графики пересекаются ещё и в точке $\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)$, симметричной точке $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ относительно начала координат. Область между данными графиками состоит из двух равных по площади областей, симметричных относительно начала координат. Пусть V_1 – объём, полученный при вращении фигуры справа от оси Ox, т.е. при $x\ge 0$.



$$V=2V_1=2\pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx=\pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin^2 x-\frac{8x^2}{\pi^2}\right)dx=\pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\frac{8x^2}{\pi^2}\right)dx=$$

$$=\pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2x-\frac{8x^2}{\pi^2}\right)dx=\pi\cdot\left(x-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{8x^3}{3\pi^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{2}-\frac{8\pi^3}{24\pi^2}-0\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ответ: $V=\frac{\pi^2}{6}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.