Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями $x=\sqrt{72-y^2}$, $6x=y^2$, $y=0$ $(y\ge 0)$.

Решение

Определим линии, которые задают данные уравнения. Так как $x=\sqrt{72-y^2}$, то при условии $-6\sqrt{2}\le y\le 6\sqrt{2}$ и $x\ge 0$, получим:

$$x^2=72-y^2;\ x^2+y^2=72.$$

Уравнение $x^2+y^2=72$ при условии $x\ge 0$ определяет полуокружность с центром в начале координат и радиусом $6\sqrt{2}$, расположенную справа от оси Oy.

Уравнение $6x=y^2$, $x=\dfrac{y^2}{6}$ определяет параболу с вершиной в начале координат и осью симметрии Ox.

Найдем точки пересечения данных линий:

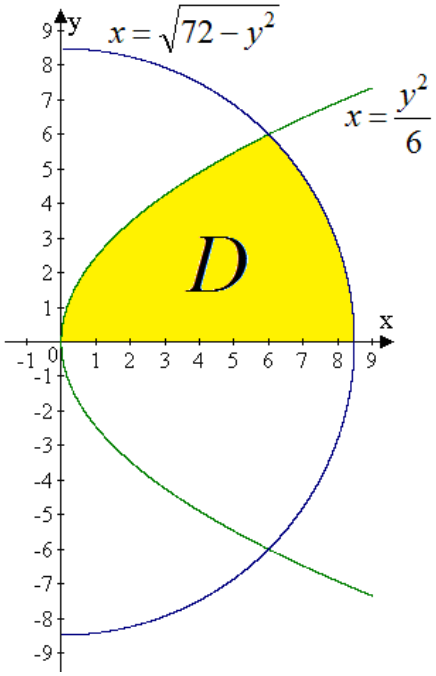
$$\begin{cases} x=\sqrt{72-y^2}; \\ 6x=y^2. \end{cases}$$

$$x=\sqrt{72-6x};$$

$$x^2+6x-72=0;$$

$$x_1=-12;\ x_2=6.$$

Так как из уравнения $6x=y^2$ следует $x\ge 0$, то подходит только второй корень: $x=6$. Если $x=6$, то $y_1=-6$, $y_2=6$. Графики пересекаются в точках $(6;-6)$, $(6;6)$.



Так как кривые симметричны относительно оси Ox, то вся площадь $S = 2S_D$, где S_D – площадь области, расположенной над осью Ox.

$$D: 0 \le y \le 6;\ \frac{y^2}{6} \le x \le \sqrt{72 - y^2}$$

$$S_D = \int_0^6 dy \int_{\frac{y^2}{6}}^{\sqrt{72-y^2}} dx = \int_0^6 \left(\sqrt{72 - y^2} - \frac{y^2}{6} \right) dy = \int_0^6 \sqrt{72 - y^2}\, dy - \frac{1}{6}\int_0^6 y^2 dy = \left[\begin{array}{l} \textit{Замена в первом интеграле:} \\ y = 6\sqrt{2}\sin t;\ dy = 6\sqrt{2}\cos t dt. \\ \begin{array}{c|c|c} y & 0 & 6 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array} \end{array} \right] =$$

$$= 72\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt - \frac{1}{18} \cdot y^3 \Big|_0^6 = 36\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt - 12 = 36 \cdot \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 12 = 9\pi + 6.$$

$$S = 2S_D = 2 \cdot (9\pi + 6) = 18\pi + 12.$$

Ответ: $18\pi + 12$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.