Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Плоская область D ограничена заданными линиями: $y=\sqrt{x+1}$, $x-y=1$, $x+y=-1$.

1) Сделайте схематический рисунок области D.
2) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.

Решение

Уравнение $y=\sqrt{x+1}$ определяет ветвь параболы $x=y^2-1$ с осью симметрии Ox и вершиной в точке $(-1;0)$, расположенную над осью Ox. Уравнения $x=y+1$ и $x=-y-1$ определяют прямые. Найдём точку пересечения прямых:

$$y+1=-y-1,\ 2y=-2,\ y=-1.$$

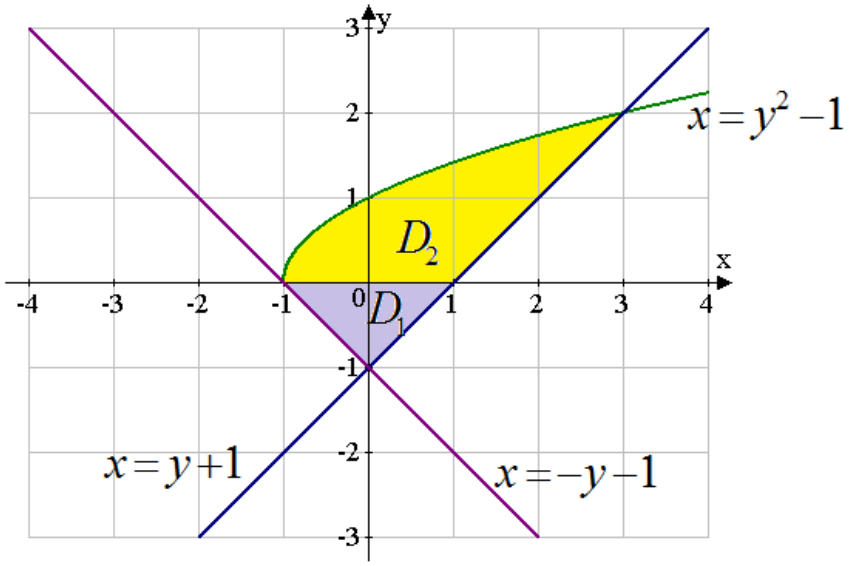
Прямые пересекаются в точке $(0;-1)$. Найдём точку пересечения ветви параболы $x=y^2-1$ ($y\ge 0$) и прямой $x=y+1$:

$$y+1=y^2-1,\ y^2-y-2=0,\ D=9,\ y_1=-1,\ y_2=2.$$

Графики пересекаются в точке $(3;2)$. Найдём точку пересечения ветви параболы $x=y^2-1$ ($y\ge 0$) и прямой $x=-y-1$:

$$-y-1=y^2-1,\ y^2+y=0,\ y(y+1)=0,\ y_1=0,\ y_2=-1.$$

Графики пересекаются в точке $(-1;0)$.



$D_1: -1\le y\le 0;\ -y-1\le x\le y+1.$

$D_2: 0\le y\le 2;\ y^2-1\le x\le y+1.$

$$S=\iint\limits_{D_1} dxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy=\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{-y-1}^{y+1} dx+\int\limits_{0}^{2} dy\int\limits_{y^2-1}^{y+1} dx=\int\limits_{-1}^{0} x\Big|_{-y-1}^{y+1} dy+\int\limits_{0}^{2} x\Big|_{y^2-1}^{y+1} dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}(2y+2)dy+\int\limits_{0}^{2}(y+2-y^2)dy=\left(y^2+2y\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2}=1+\frac{10}{3}=\frac{13}{3}.$$

Ответ: $S=\frac{13}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.