Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

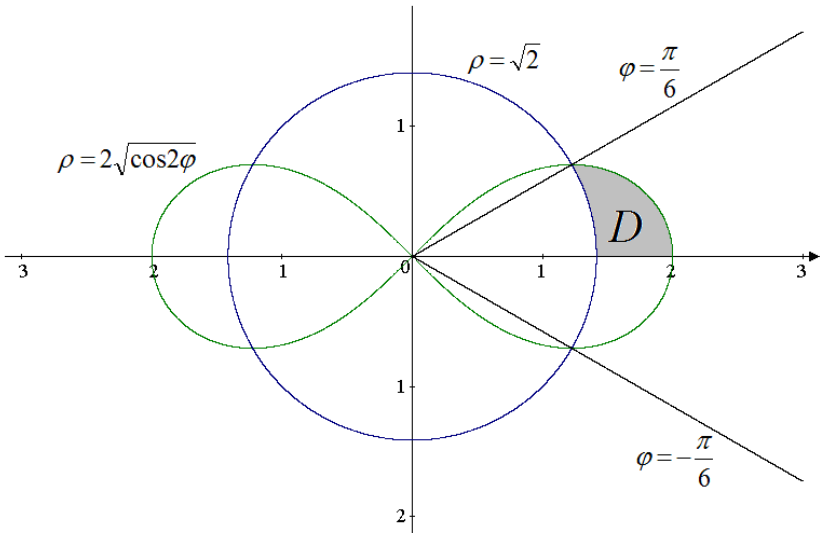
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho = \sqrt{2}$ ($\rho \ge \sqrt{2}$).

Решение

Так как $\cos 2\varphi \ge 0$, то $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}$. Найдём значения φ, при которых кривая $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ пересекает окружность $\rho = \sqrt{2}$:

$$2\sqrt{\cos 2\varphi} = \sqrt{2};\ \cos 2\varphi = \frac{1}{2}.$$

Из полученного уравнения имеем $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}$, $\varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$. Искомая площадь $S = 4S_D$, где S_D – площадь области D:



$D: 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6};\ \sqrt{2} \le \rho \le 2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

$$S = 4S_D = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 \Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (4\cos 2\varphi - 2)d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)d\varphi =$$

$$= 4\cdot(\sin 2\varphi - \varphi)\Big|_0^{\pi/6} = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.