Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

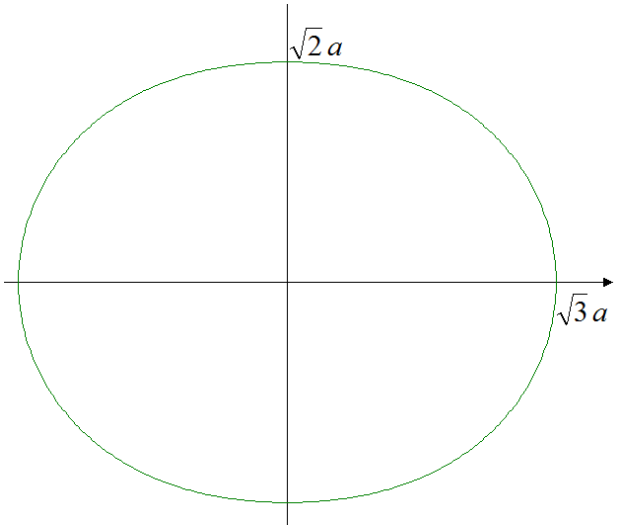
Условие

Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(3x^2+2y^2\right)$, заданной уравнением в декартовых координатах ($a>0$).

Решение

Перейдем в полярную систему координат:

$$\rho^4=a^2\cdot\rho^2\cdot\left(3\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi\right);\ \rho^2=a^2\left(2+\cos^2\varphi\right),\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$



$$S=2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\rho(\varphi)}\rho d\rho=2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\rho(\varphi)}\rho d\rho=2\int_0^{\pi}\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\rho(\varphi)}d\varphi=\int_0^{\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi=a^2\int_0^{\pi}\left(2+\cos^2\varphi\right)d\varphi=a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=a^2\cdot\left(\frac{5\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{5\pi a^2}{2}.$$

Ответ: $S=\dfrac{5\pi a^2}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.