Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями: $y^2-2y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}\cdot x$, $y^2-4y+x^2=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Решение

$$y^2-2y+x^2=0;\ y^2-2y+1+x^2=1;\ x^2+(y-1)^2=1.$$

Следовательно, уравнение $y^2-2y+x^2=0$ определяет окружность с центром в точке $(0;1)$ и радиусом $R_1=1$. В полярной системе координат: $\rho^2-2\rho\sin\varphi=0$, $\rho=2\sin\varphi$.

$$y^2-4y+x^2=0;\ y^2-4y+4+x^2=4;\ x^2+(y-2)^2=4.$$

Следовательно, уравнение $y^2-4y+x^2=0$ определяет окружность с центром в точке $(0;2)$ и радиусом $R_2=2$. В полярной системе координат: $\rho^2-4\rho\sin\varphi=0$, $\rho=4\sin\varphi$.

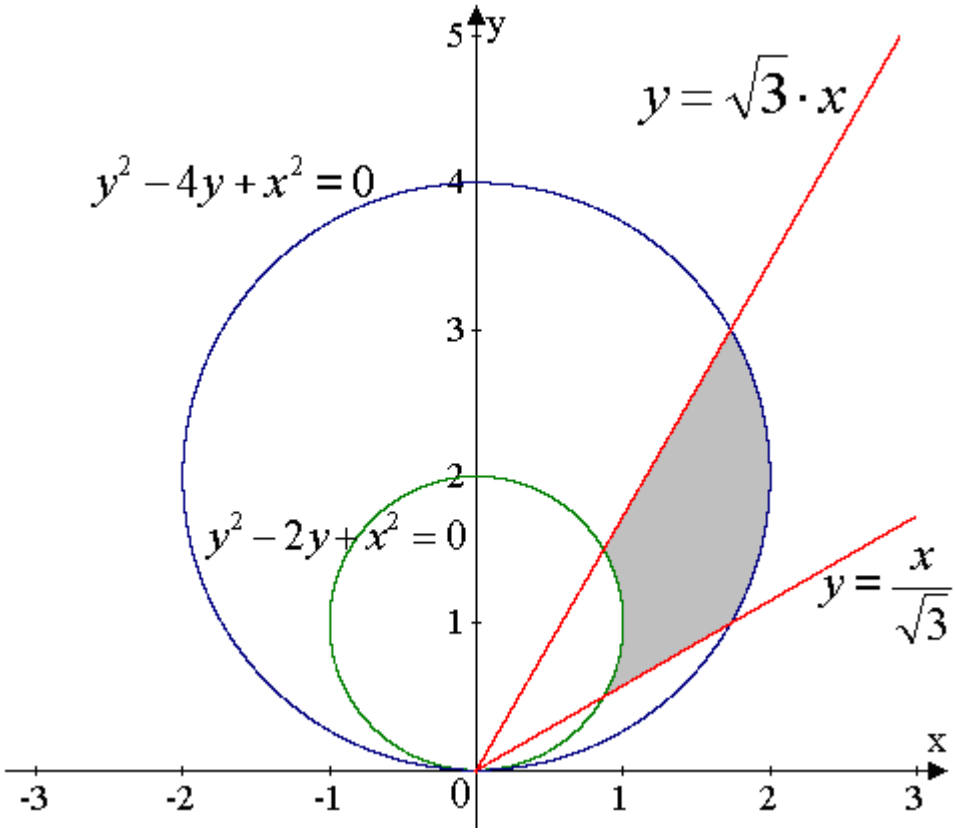
Так как в полярной системе координат $\rho\ge 0$, то для обеих окружностей $0\le\varphi\le\pi$.

Уравнения прямых $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ и $y=\sqrt{3}\cdot x$ в полярной системе координат станут такими:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ \rho\sin\varphi=\frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}};\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \left[\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{\pi}{6};\\ \varphi=\dfrac{7\pi}{6}.\end{array}\right.$$

$$y=\sqrt{3}x;\ \rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi;\ \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3};\ \left[\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{\pi}{3};\\ \varphi=\dfrac{4\pi}{3}.\end{array}\right.$$

Так как для окружностей $0\le\varphi\le\pi$, то рассмотрим части прямых: лучи $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.



В полярной системе координат: $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, $2\sin\varphi \le \rho \le 4\sin\varphi$.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} d\varphi = 6 \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi \, d\varphi = 3 \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 3 \cdot \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = 3 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right) = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.