Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной окружностью $y^2-4y+x^2=0$ вне круга $y^2+x^2=4$.

Решение

$$x^2+y^2-4y+4=4,\ x^2+(y-2)^2=4.$$

Уравнение $y^2-4y+x^2=0$ определяет окружность с центром в точке $(0;2)$ и радиусом $R_1=2$. В полярной системе координат:

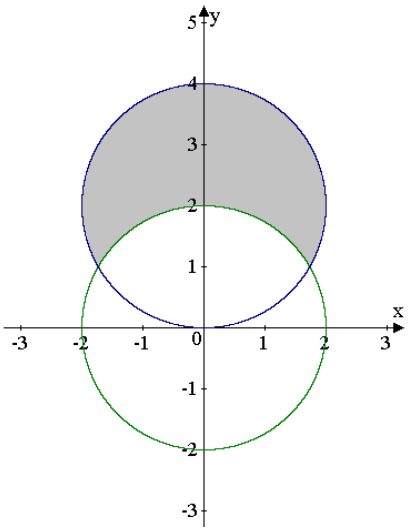
$$\rho^2=4\rho\sin\varphi,\ \rho=4\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi.$$

Уравнение $x^2+y^2=4$ определяет окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $R_2=2$. В полярной системе координат:

$$\rho^2=4,\ \rho=2,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Найдем значения φ, при котором пересекаются данные окружности:

$$2=4\sin\varphi,\ \sin\varphi=\frac{1}{2},\left[\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{\pi}{6};\\ \varphi=\dfrac{5\pi}{6}.\end{array}\right.$$



$$\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{5\pi}{6},\ 2\le\rho\le 4\sin\varphi.$$

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\varphi\int\limits_{2}^{4\sin\varphi}\rho d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{2}^{4\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(8\sin^2\varphi-2\right)d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(2-4\cos 2\varphi\right)d\varphi=\left(2\varphi-2\sin 2\varphi\right)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.