Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $|x|y=-1$, $x^2+y=0$, $y+3=0$.

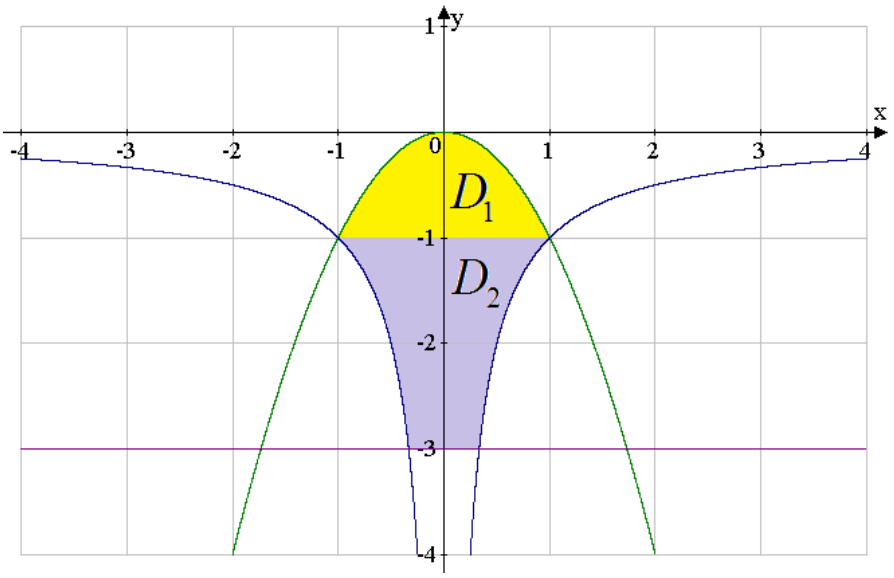
Решение

Область D ограничена линией $|x|\cdot y=-1$, параболой $y=-x^2$ и прямой $y=-3$. Для построения чертежа запишем уравнение линии $|x|y=-1$ в явном виде. Если $x=0$, то имеем противоречие $|0|\cdot y=-1$, $0=-1$. Указанное противоречие говорит о том, что $x\neq 0$. Если $x>0$, то $|x|=x$; если $x<0$, то $|x|=-x$, поэтому уравнение $|x|y=-1$, $y=-\dfrac{1}{|x|}$ запишется так: $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ -\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$. График $y=-\dfrac{1}{|x|}$ состоит из двух ветвей гипербол.

Найдем точки пересечения графика $y=-\dfrac{1}{|x|}$ и параболы $y=-x^2$:

$$-\frac{1}{|x|}=-x^2,\ \frac{1}{|x|}=x^2,\ \frac{1}{|x|^2}=x^4,\ \frac{1}{x^2}=x^4,\ x^6=1,\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right.$$

Графики пересекаются в точках $(-1;-1)$ и $(1;-1)$.



Для области D_1 имеем: $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le y\le -x^2\end{cases}$, $D_2:\begin{cases}-3\le y\le -1\\ \dfrac{1}{y}\le x\le -\dfrac{1}{y}\end{cases}$

$$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy = \iint\limits_{D_1} \left(x^2+y\right)dxdy + \iint\limits_{D_2} \left(x^2+y\right)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{-x^2} \left(x^2+y\right)dy + \int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{-\frac{1}{y}} \left(x^2+y\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{-1}^{-x^2} dx + \int\limits_{-3}^{-1} \left(\frac{x^3}{3} + xy \right)\Bigg|_{1/y}^{-1/y} dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(-\frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{1}{2} \right)dx + \int\limits_{-3}^{-1} \left(-\frac{2}{3y^3} - 2 \right)dy =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1} \left(-\frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{1}{2} \right)dx + \int\limits_{-3}^{-1} \left(-\frac{2}{3} y^{-3} - 2 \right)dy = \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} - x \right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{1}{3y^2} - 2y \right)\Bigg|_{-3}^{-1} =$$

$$= -\frac{8}{15} + \left(-\frac{100}{27} \right) = -\frac{572}{135}.$$

Ответ: $-\frac{572}{135}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.