Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

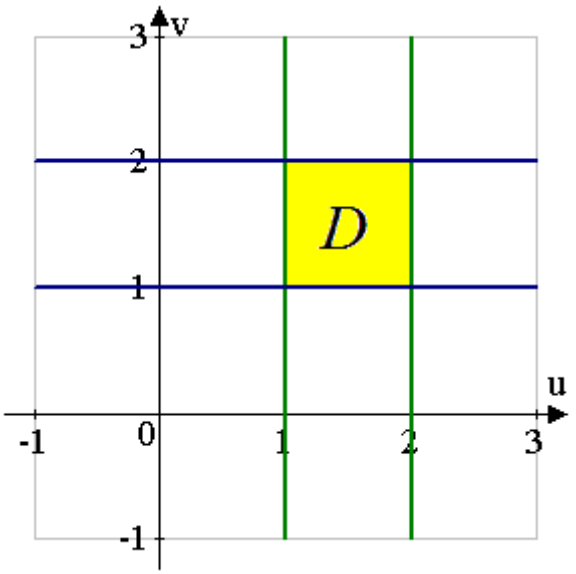
Условие

Вычислить кратный интеграл $\iint\limits_{\Omega} y^2 dxdy$, $\Omega: y=\frac{1}{x}; y=\frac{2}{x}; y=x; y=2x$ путём перехода к криволинейным координатам $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.

Решение

$$y=\frac{1}{x};\ xy=1\ \Rightarrow\ u=1.$$
$$y=\frac{2}{x};\ xy=2\ \Rightarrow\ u=2.$$
$$y=x;\ \frac{y}{x}=1\ \Rightarrow v=1.$$
$$y=2x;\ \frac{y}{x}=2\ \Rightarrow v=2.$$

В системе координат Ouv получим область D, ограниченную прямыми $u=1$, $u=2$, $v=1$, $v=2$:



$D: 1\le u\le 2; 1\le v\le 2.$

Выразим x и y через u и v, при условии того, что $u>0$ и $v>0$.

$$\begin{cases} u=xy \\ v=\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u}{y} \\ v=\frac{y}{x} \end{cases}$$

$v=\frac{y}{u/y};\ v=\frac{y^2}{u};\ y=\sqrt{uv}$.

$$x=\frac{u}{\sqrt{uv}}=\sqrt{\frac{u}{v}}\,.$$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}+\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{4v}+\frac{1}{4v}=\frac{1}{2v}\,.$$

$$\iint\limits_{\Omega}y^2dxdy=\int\limits_1^2du\int\limits_1^2\frac{1}{2v}\cdot uvdv=\frac{1}{2}\int\limits_1^2udu\int\limits_1^2dv=\frac{1}{2}\int\limits_1^2u\cdot v\Big|_1^2du=\frac{1}{2}\int\limits_1^2udu=\frac{1}{4}\cdot u^2\Big|_1^2=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.