Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy=a^2$, $xy=3a^2$, $y=x$, $y=2x$ ($x>0$, $y>0$).

Решение

Данная площадь ограничена гиперболами $xy=a^2$, $xy=3a^2$ и прямыми $y=x$, $y=2x$. Перейдём к новым переменным u, v по таким формулам: $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$. Так как $x>0$, $y>0$, то $u>0$, $v>0$. Исходя из формул $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$ имеем $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$.

$$x'_u=\frac{1}{\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}};\ x'_v=\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot v^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$
$$y'_u=\sqrt{v}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}},\ y'_v=\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}.$$

Якобиан преобразования будет таким:

$$I(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\left(u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\cdot u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\cdot u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(v^{-1}+v^{-1}\right)=\frac{1}{2v}.$$

Так как $v>0$, то $|I(u,v)|=\dfrac{1}{2v}$.

$$\begin{cases}a^2\le xy\le 3a^2\\ 1\le\dfrac{y}{x}\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2\le u\le 3a^2\\ 1\le v\le 2\end{cases}$$

$$S=\int\limits_{a^2}^{3a^2}du\int\limits_1^2\frac{dv}{2v}=\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{3a^2}du\int\limits_1^2\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{3a^2}\ln|v|\Big|_1^2du=\frac{\ln 2}{2}\int\limits_{a^2}^{3a^2}du=\frac{\ln 2}{2}\cdot u\Big|_{a^2}^{3a^2}=\frac{\ln 2}{2}\cdot 2a^2=a^2\ln 2.$$

Ответ: $a^2\ln 2$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.