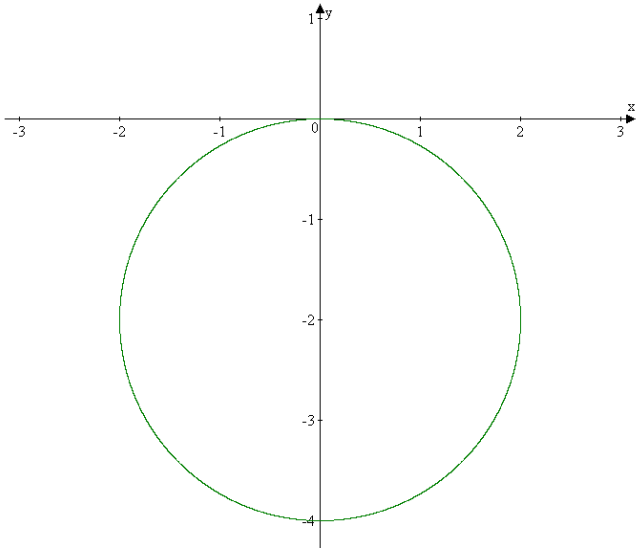
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где область D ограничена линией $x^2+\left(y+2\right)^2=4$, используя полярные координаты.

Решение

Уравнение $x^2+\left(y+2\right)^2=4$ определяет окружность с центром в точке $\left(0;-2\right)$ и радиусом 2.



Перейдём в полярную систему координат.

$x^2+y^2+4y+4=4;\ x^2+y^2=-4y\ \Rightarrow\ \rho^2=-4\rho\sin\varphi;\ \rho=-4\sin\varphi.$

Область D определяется такими неравенствами: $\pi\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le -4\sin\varphi$.

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{-4\sin\varphi}\rho^3d\rho=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{-4\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\left(-4\sin\varphi\right)^4}{4}d\varphi=$$
$$=\int\limits_{\pi}^{2\pi}64\sin^4\varphi\,d\varphi=\int\limits_{\pi}^{2\pi}64\left(\sin^2\varphi\right)^2d\varphi=\int\limits_{\pi}^{2\pi}64\cdot\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$
$$=\int\limits_{\pi}^{2\pi}16\cdot\left(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=\int\limits_{\pi}^{2\pi}16\cdot\left(1-2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$
$$=\int\limits_{\pi}^{2\pi}16\cdot\left(\frac{3}{2}-2\cos 2\varphi+\frac{\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(24-32\cos 2\varphi+8\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$
$$=\left(24\varphi-16\sin 2\varphi+2\sin 4\varphi\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}=24\pi.$$

Ответ: 24π.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.