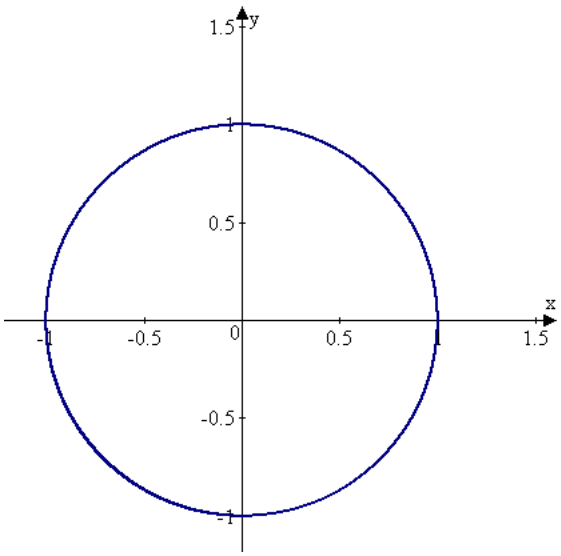
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить интеграл $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, $D:\{x^2+y^2\le 1\}$.

Решение

Уравнение $x^2+y^2=1$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом $R=1$.



Запишем уравнение окружности в полярной системе координат:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \rho^2=1;\ \rho=1.$$

Для области D имеем $0\le\varphi\le 2\pi$; $0\le\rho\le 1$.

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho e^{-\rho^2}d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 e^{-\rho^2}d\left(-\rho^2\right)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}e^{-\rho^2}\Big|_0^1 d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(e^{-1}-1\right)d\varphi=$$
$$=\frac{e-1}{2e}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{e-1}{2e}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{e-1}{2e}\cdot 2\pi=\frac{\pi\cdot(e-1)}{e}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi\cdot(e-1)}{e}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.