Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

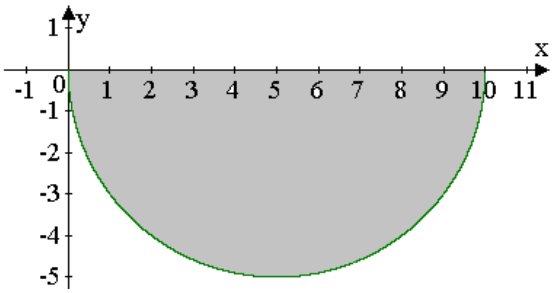
Вычислить интеграл $\int\limits_0^{10} dx \int\limits_{-\sqrt{10x-x^2}}^{0} \sqrt{100-x^2-y^2}\,dy$, перейдя к полярным координатам.

Решение

Выясним, какую линию определяет уравнение $y=-\sqrt{10x-x^2}$. Так как $\sqrt{10x-x^2}\ge 0$, то $y\le 0$.

$$y=-\sqrt{10x-x^2},\ y^2=10x-x^2,\ x^2-10x+y^2=0,\ (x-5)^2+y^2=25.$$

Следовательно, уравнение $y=-\sqrt{10x-x^2}$ определяет полуокружность с центром в точке $(5;0)$ и радиусом $R=5$, расположенную под осью Ox.



Перейдём в полярную систему координат:

$$x^2+y^2=10x \Rightarrow \rho^2=10\rho\cos\varphi;\ \rho=10\cos\varphi.$$

Для области интегрирования получим: $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0;\ 0\le\rho\le 10\cos\varphi$.

$$\int\limits_0^{10} dx \int\limits_{-\sqrt{10x-x^2}}^{0} \sqrt{100-x^2-y^2}\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_0^{10\cos\varphi} \rho\sqrt{100-\rho^2}\,d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_0^{10\cos\varphi} \left(100-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(100-\rho^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\left(100-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{10\cos\varphi} d\varphi = -\frac{1000}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\sin^3\varphi-1\right)d\varphi = -\frac{1000}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3\varphi\,d\varphi + \frac{1000}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi =$$

$$= -\frac{1000}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\left(\cos\varphi\right) + \frac{1000}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi = -\frac{1000}{3}\cdot\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{0} + \frac{1000}{3}\cdot\varphi\Big|_{-\pi/2}^{0} = \frac{500\pi}{3}-\frac{2000}{9}.$$

Ответ: $\frac{500\pi}{3}-\frac{2000}{9}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.