Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить $\iint\limits_D ydxdy$ по области D: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=10x$, $y=0$, $y=\sqrt{3}\cdot x$.

Решение

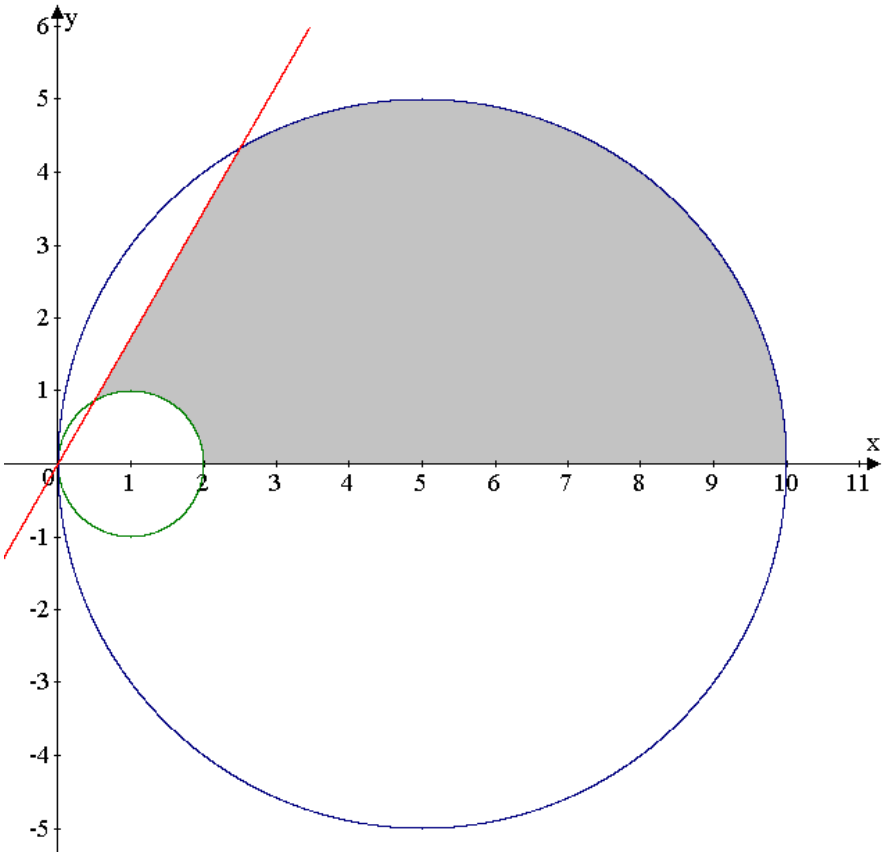
$$x^2+y^2=2x;\ x^2-2x+y^2=0;\ x^2-2x+1+y^2=1;\ (x-1)^2+y^2=1.$$

$$x^2+y^2=10x;\ x^2-10x+y^2=0;\ x^2-10x+25+y^2=25;\ (x-5)^2+y^2=25.$$

Следовательно, уравнение $x^2+y^2=2x$ определяет окружность с центром в точке $(1;0)$ и радиусом $R=1$. Уравнение $x^2+y^2=10x$ определяет окружность с центром в точке $(5;0)$ и радиусом $R=5$. В полярной системе координат уравнения окружностей станет такими:

$$x^2+y^2=2x \Rightarrow \rho^2=2\rho\cos\varphi;\ \rho=2\cos\varphi.$$
$$x^2+y^2=10x \Rightarrow \rho^2=10\rho\cos\varphi;\ \rho=10\cos\varphi.$$

Так как данная область ограничена прямыми $y=0$ и $y=\sqrt{3}x$, то для области D имеем $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.



D: $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$, $2\cos\varphi\le\rho\le10\cos\varphi$.

$$\iint\limits_D y dx dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{10\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_{2\cos\varphi}^{10\cos\varphi} d\varphi = \frac{992}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi \cdot \cos^3\varphi\, d\varphi = -\frac{992}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3\varphi\, d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{992}{3} \cdot \frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi/3} = \frac{155}{2}.$$

Ответ: $\frac{155}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.