Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

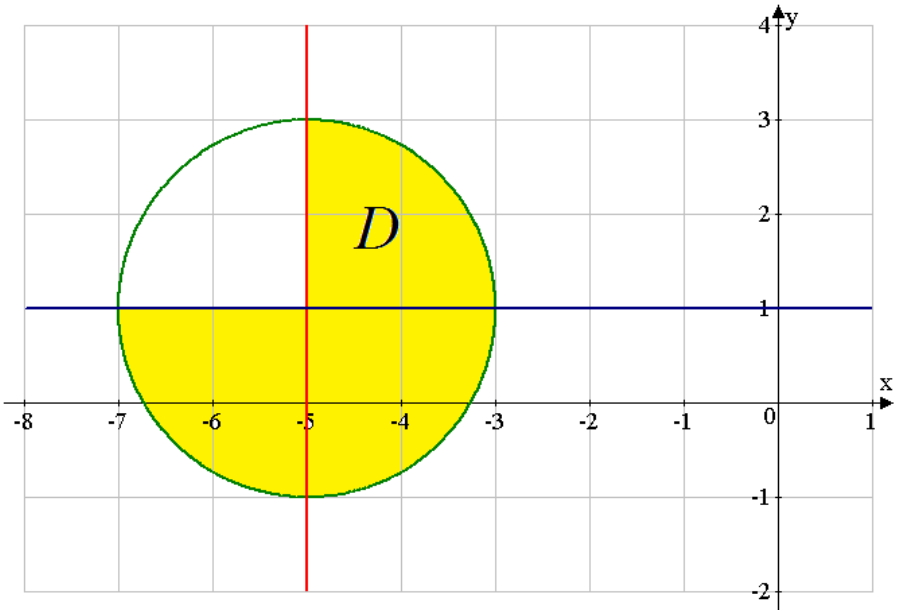
Условие

С помощью перехода к полярным координатам найти интеграл $\iint\limits_D (x+5y)dxdy$ по области $D = A \setminus B$, где $A = \{(x,y): x^2 + y^2 + 22 \le 2y - 10x\}$, $B = \{(x,y): x \le -5; y \ge 1\}$.

Решение

$$x^2 + y^2 + 22 = 2y - 10x,\ x^2 + 10x + y^2 - 2y + 22 = 0,\ (x+5)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Область A – множество точек внутри и на окружности с центром в точке $(-5;1)$ и радиусом $R = 2$.



Перейдём в полярную систему координат по таким формулам:

$$\begin{cases} x + 5 = \rho\cos\varphi \\ y - 1 = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi - 5 \\ y = \rho\sin\varphi + 1 \end{cases}$$

Уравнение окружности станет таким:

$$(\rho\cos\varphi - 5 + 5)^2 + (\rho\sin\varphi + 1 - 1)^2 = 4,\ \rho^2 = 4,\ \rho = 2.$$

Для полярного угла получим: $-\pi \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \cdot \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho.$$

$$\iint\limits_D (x+5y)dxdy = \int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\left(\rho\cos\varphi - 5 + 5\rho\sin\varphi + 5\right)d\rho = \int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + 5\sin\varphi)d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + 5\sin\varphi)\cdot \frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^2 d\varphi = \frac{8}{3}\cdot \int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + 5\sin\varphi)d\varphi = \frac{8}{3}\cdot (\sin\varphi - 5\cos\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi/2} = -\frac{32}{3}.$$

Ответ: $-\frac{32}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.