Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

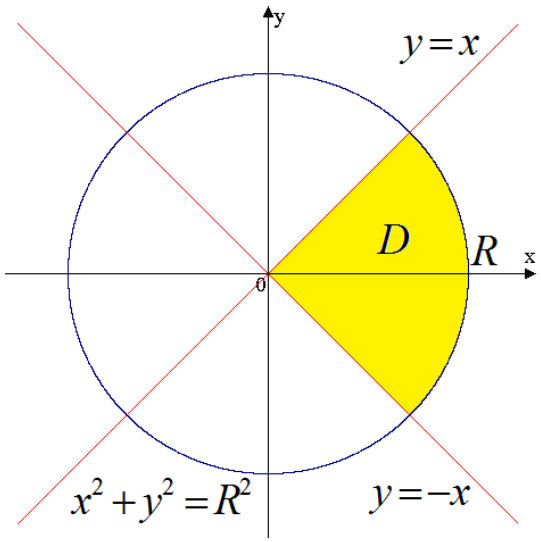
Условие

Перейти к полярной системе координат и вычислить интеграл:

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy,\ D:\left\{x^2+y^2\le R^2;\ -x\le y\le x\right\}.$$

Решение

Уравнение $x^2+y^2=R^2$ определяет окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом R. В полярной системе координат уравнение окружности станет таким: $\rho^2=R^2$, $\rho=R$. Так как заданная область ограничена прямыми $y=x$ и $y=-x$, то для области D имеем $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.



$$D:\begin{cases}-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le\rho\le R\end{cases}$$

$$\iint\limits_{(D)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^R\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^R\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(R^2-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R d\varphi=-\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(0-R^3\right)d\varphi=\frac{R^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi=\frac{R^3}{3}\cdot\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{R^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi R^3}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^3}{6}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.