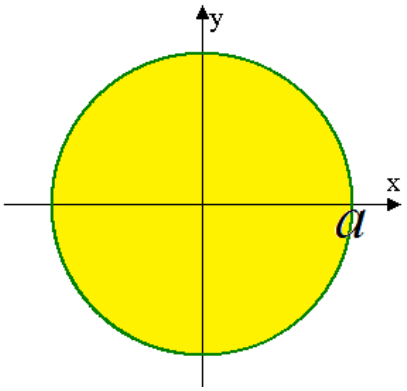
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить с помощью полярных координат $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$, где $\Omega = \left\{(x,y): x^2+y^2 \le a^2\right\}$.

Решение

Уравнение $x^2+y^2=a^2$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом $R=a$. В полярной системе координат уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ станет таким: $\rho = a$. Для области Ω получим: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le a$.



$$\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\rho^2}\cdot \rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^a \rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^a d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{4}\cdot\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.